

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Новосибирский государственный университет

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической кибернетики

Е. В. Константинова

ЛЕКЦИИ

ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Учебное пособие

Новосибирск
2023

УДК 519.1
ББК 22.174
К65

Рецензент д-р физ.-мат. наук, прф В. В. Кабанов.

Константинова, Е. В.

Лекции по алгебраической теории графов: учеб. пособие / Е. В. Константинова; Новосибир. гос. ун-т. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2023. — 138 с.

ISBN 978-5-4437-1410-3

Уникальность курса по алгебраической теории графов состоит в том, что эта дисциплина впитала и вобрала в себя многие математические дисциплины. Она связала линейную алгебру с теорией графов, теорию групп со спектральной теорией графов, теорию графов Кэли с геометрической теорией групп.

Курс лекций служит хорошим примером междисциплинарности не только внутри математики, но и показывает связь этой математической дисциплины с химией, физикой, биоинформатикой и компьютерными науками. Пособие будет полезно студентам математических и прикладных дисциплин, аспирантам и преподавателям вузов.

В пособии представлены все основные направления современной алгебраической теории графов с доступным изложением основ теории графов, линейной алгебры, теории групп, алгебраической комбинаторики и теории представлений конечных групп. Изложение снабжено иллюстрациями и примерами, подробной библиографией и упражнениями.

Издание подготовлено при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

УДК 519.1
ББК 22.174

ISBN 978-5-4437-1410-13

© Новосибирский государственный университет, 2023

Оглавление

Введение	6
1 Основы теории графов	8
1.1 Граф, степень, изоморфизм	8
1.2 Пути, связность, расстояние	9
1.3 Регулярные графы	10
1.4 Специальные классы графов	11
1.5 Операции над графами	11
1.6 Подграфы	13
1.7 Упражнения	14
2 Матрицы и графы	15
2.1 Матрица смежности	15
2.2 Матрица инцидентности	18
2.3 Матрица Кирхгофа	18
2.4 Упражнения	19
3 Характеристический полином и спектр графа	20
3.1 Характеристический полином	20
3.2 Спектр графа	22
3.3 Собственная функция графа	25
3.4 Решение задач со спектрами	25
3.5 Упражнения	27
4 Дистанционно регулярные графы	28
4.1 Дистанционно регулярные графы	28
4.2 Сильно регулярные графы	31
4.3 Графы Мура	35
4.4 Упражнения	37
5 Группы и графы	38
5.1 Основные понятия	38
5.2 Диэдральная группа	40

5.3	Симметрическая группа	41
5.4	Группа автоморфизмов графа	42
5.5	Упражнения	45
6	Транзитивные графы	47
6.1	Вершинно- и реберно-транзитивные графы	47
6.2	Дистанционно-транзитивные графы	50
6.3	Графы Кэли	53
6.4	Схематическая связь между регулярными и транзитивными графами .	58
6.5	Упражнения	58
7	Семейства графов	60
7.1	Граф Хэмминга	60
7.2	Граф Джонсона	64
7.3	Граф Кнезера	67
7.4	Упражнения	69
8	Графы Кэли на симметрической группе	70
8.1	Транспозиционный граф	70
8.2	Bubble-sort граф	71
8.3	Star граф	73
8.4	Реверсальный граф	75
8.5	Pancake граф	76
8.6	Упражнения	77
9	Нахождение диаметра графа Кэли	78
9.1	NP-трудность и кубик Рубика	78
9.2	Диаметр графа Кэли на абелевой группе	79
9.3	Диаметр графа Кэли на неабелевой группе	80
9.4	Диаметр графов Кэли на симметрической и знакопеременной группах .	81
9.5	Упражнения	85
10	Pancake problem	86
10.1	Постановка задачи	86
10.2	Алгоритм Гейтса-Пападимитроу	89
10.3	Верхняя оценка на диаметр Pancake графа	93
10.4	Нижняя оценка на диаметр Pancake графа	96
10.5	Точные значения диаметра Pancake графа	97
10.6	Упражнения	98

11 Гамильтоновость графов Кэли	99
11.1 Гипотезы Ловаса и Бабаи	99
11.2 Комбинаторные условия для гамильтоновости	102
11.3 Гамильтоновость графов Кэли на симметрической группе	105
11.4 Упражнения	106
12 Коды Грея	107
12.1 Гамильтоновость гиперкуба и код Грея	107
12.2 Иерархическое строение Рапсаке графа	109
12.3 Гамильтоновость Рапсаке графа	110
12.4 Порождающий алгоритм Закса	112
12.5 Префикс-реверсальный код Грея	114
12.6 Упражнения	115
13 Спектр Star графа	116
13.1 Целочисленные графы	116
13.2 Целочисленность Star графа	117
13.3 Перестановки и классы сопряженности	118
13.4 Разбиения и таблицы Юнга	119
13.5 Представление симметрической группы	121
13.6 Пример	125
Литература	129

Введение

Термин «Алгебраическая теория графов» был введен Норманом Биггсом в 1974 году. Так называлась его книга, в которой были заложены основы новой дисциплины. В наши дни алгебраическая теория графов превратилась в самостоятельную и достаточно разветвленную дисциплину, которая включает в себя спектральную теорию графов, теорию графов Кэли, алгебраическую комбинаторику. В целом, алгебраическая теория графов опирается на теорию графов, теорию групп и линейную алгебру.

Учебное пособие подготовлено на основе семестрового курса лекций по алгебраической теории графов, прочитанного в 2020-2021 годах студентам магистратуры механико-математического факультета НГУ, имеющих разнообразные математические направления специализации: от алгебраической комбинаторики и комбинаторной геометрии до теории кодирования и математической экономики.

Учебное пособие состоит из 13 глав, каждая из которых содержит материал нескольких лекций.

Мы начинаем с базовых понятий теории графов и основ теории групп, и сопровождаем их большим количеством разнообразных примеров.

Затем мы вспоминаем основы линейной алгебры и устанавливаем связи между матрицами и графами. В первую очередь нас будет интересовать матрица смежности графа, ее собственные числа, собственные вектора, а также спектр матрицы. В том числе, мы поговорим о спектрах регулярного и реберного графов, о спектральной характеристике двудольного графа и о приемах, позволяющих вычислять спектры графов.

Следующие главы посвящены связям между графами и группами. В рамках этого направления мы поговорим об автоморфизмах графов, покажем как транзитивность графов связана с их регулярностью, узнаем

всякие ли вершинно-транзитивные графы являются графами Кэли, а также посмотрим как графы Кэли возникают в других областях знаний.

Мы рассмотрим наиболее интенсивно изучаемые семейства в алгебраической теории графов, такие как графы Хэмминга, Джонсона, Кнезера, Мура. Отдельный интерес для нас представляют графы Кэли на симметрической группе, которые естественным образом возникают в компьютерных науках в качестве сетей, а также в биоинформатике в качестве математических моделей мутационных процессов.

Далее мы изучим две важные открытые проблемы на графах Кэли, а именно - задачу определения диаметра графа Кэли и условия его гамильтоновости. В этой части пособия особое внимание уделяется графам Кэли на симметрической группе, а также методам и подходам, основанным на иерархическом строении графов.

Связь между спектральной теорией графов и теорией представлений конечных групп будет продемонстрирована при решении задачи о кратностях собственных значений графов Кэли на симметрической группе относительно порождающего множества транспозиций специального вида. Спектр этого графа известен, он является целочисленным, а вот задача определения кратностей его собственных значений является трудной и требует создания специальной теории с использованием комбинаторных методов и таблиц Юнга.

В целом, все главы пособия связаны друг с другом. Мы начнем с простых и доступных понятий и определений, и постепенно доберемся до вершин алгебраической теории графов. Лекционный материал пособия позволяет читателю не только усвоить основы алгебраической теории графов, но и существенно расширить свой математический кругозор, увидеть неожиданные связи между различными дисциплинами. Например, узнать, как удалось ответить на вопрос о том, сколько требуется вращений кубика Рубика, чтобы собрать его, и какое это имеет отношение к теории графов Кэли. Методы алгебраической теории графов находят применение в компьютерных науках, биоинформатике, математической химии, теории кодирования, топологии, геометрии.

Глава 1

Основы теории графов

В этой главе даются базовые понятия теории графов [91].

1.1 Граф, степень, изоморфизм

Граф $\Gamma = (V, E)$ состоит из конечного непустого множества вершин V и множества ребер E (неупорядоченных пар различных вершин). *Порядок* n графа Γ определяется мощностью множества его вершин, т. е. $n = |V(\Gamma)|$. Мощность множества ребер обозначим $m = |E(\Gamma)|$. Две различные вершины u и v являются *смежными*, $u \sim v$, если они принадлежат одному ребру $e = \{u, v\}$. В этом случае также говорят, что вершины u и v *инцидентны* ребру e . Множество всех вершин, смежных с вершиной v , называют *окрестностью* $N(v)$ вершины v .

Неориентированный граф без петель и кратных ребер называется *обыкновенным* графом, где под петлей понимаются ребра вида $\{u, u\}$.

Степенью вершины v называется число инцидентных ей ребер, которое будем обозначать как $deg(v)$. Очевидно, что $deg(v) = |N(v)|$. Вершина v называется *изолированной*, если $deg(v) = 0$, и называется *висячей*, если $deg(v) = 1$. Если сложить степени всех вершин графа, то каждое ребро внесёт в эту сумму вклад, равный двум, следовательно, сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер графа:

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} deg(v) = 2m.$$

Прямым следствием этой формулы является следующее утверждение.

Лемма 1.1.1 *Любой обыкновенный граф имеет четное число вершин нечётных степеней.*

Этот результат, известный как лемма о рукопожатиях, получен Л. Эйлером в его работе о семи кенигсберских мостах [30], положившей начало исследованиям в теории графов. Свое название лемма берет из жизненной ситуации: в группе приветствующих друг друга людей и пожимающих друг другу руки четное количество людей должно пожать нечетное количество рук другим людям.

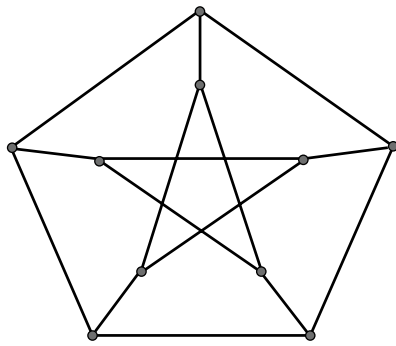
Два графа Γ_1 и Γ_2 *изоморфны*, $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$, если между их множествами вершин существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

1.2 Пути, связность, расстояние

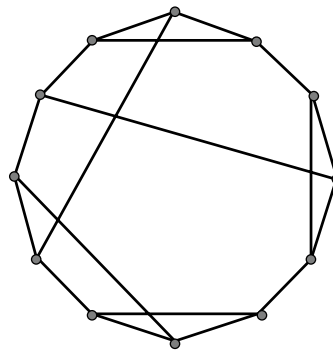
Путь из вершины v_1 в вершину v_k в графе $\Gamma = (V, E)$ определяется, как последовательность вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$ вместе с различными рёбрами $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}$. Путь называется *простым*, если все его вершины различны. Путь называется *замкнутым*, если его начальная и конечная вершины совпадают, т. е. $v_1 = v_k$. Замкнутый путь, в котором все вершины различны, называется *простым циклом*. Число ребер в пути определяет его *длину*. Между двумя заданными вершинами v и u в графе может быть несколько (v, u) -путей.

Длина кратчайшего пути из вершины v в вершину u задает *расстояние* $d(v, u)$ между вершинами v и u . Расстояние является метрикой в графе, поскольку удовлетворяет трем метрическим аксиомам, а именно: аксиомам тождества, симметрии и треугольника.

Расстояние от данной вершины v до наиболее удаленной от нее вершины называется *эксцентриситетом* вершины и обозначается $e(v)$. Вершину с наименьшим эксцентриситетом называют *центральной*, а вершину с наибольшим эксцентриситетом называют *периферийной*. Величина наименьшего эксцентриситета в графе называется *радиусом* графа и обозначается $rad(\Gamma)$. Наибольшее расстояние между двумя вершинами в графе Γ называется *диаметром* графа и обозначается $diam(\Gamma)$.



Граф Петерсена



Граф Фрухта

Рис. 1. Кубические графы

Граф является *связным*, если между любой парой вершин этого графа существует, по крайней мере, один связывающий их путь. В рамках курса рассматриваются связные графы, если не оговорено иное.

1.3 Регулярные графы

Граф Γ называется *k -регулярным* или регулярным степени k , если каждая его вершина имеет степень k . Классификация k -регулярных графов представляет особый интерес с алгоритмической точки зрения, поскольку эти графы вызывают сложность для многих алгоритмов. При $k < 3$ классификация регулярных графов достаточно проста. В 0-регулярном графе содержатся изолированные вершины, а 1-регулярный граф состоит из изолированных ребер. Связный граф является 2-регулярным тогда и только тогда, когда он является простым циклом. Регулярный граф степени три называется *кубическим*. Полная классификация кубических графов неизвестна. Из леммы о рукопожатиях следует простой факт о кубических графах.

Факт 1.3.1 *Любой кубический граф имеет четное число вершин.*

Два важных кубических графа в алгебраической теории графов представлены на рис. 1. Граф Петерсена, являющийся контрпримером ко многим гипотезам, назван в честь Юлиуса Петерсена [69], описавшего

этот граф в 1898 году. Граф Фрухта, являющийся одним из минимальных асимметричных кубических графов, носит имя Роберта Фрухта, который в 1939 году впервые его описал [31]. Граф Петерсена относится к симметричным графам, рассматриваемым в главе 6.

1.4 Специальные классы графов

Некоторые часто используемые классы графов имеют специальное обозначение. В *пустом* графе O_n на n вершинах не содержится ни одного ребра. В *полном* графе K_n каждая пара его n вершин смежна, т. е. K_n является $(n - 1)$ -регулярным графом с диаметром $diam(K_n) = 1$. Очевидно, что $K_1 \cong O_1$. В *полном двудольном* графе $K_{p,q}$ с долями мощности p и q все вершины одной доли смежны со всеми вершинами другой доли, но не смежны внутри долей, т. е. $diam(K_{p,q}) = 2$. *Цикл* на n различных вершинах принято обозначать C_n . Всякий n -цикл является 2-регулярным графом диаметра $diam(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Цикл на n вершинах без одного ребра дает *путь* P_n на n вершинах, диаметр которого равен $diam(P_n) = n - 1$. *Деревом* T_n на n вершинах называется связный ациклический граф.

1.5 Операции над графами

Новые графы можно получать при помощи операций над графами, которые разделяются на локальные и алгебраические операции.

К локальным операциям относятся удаление и добавление вершины или ребра, стягивание ребра и подразбиение ребра.

При *удалении ребра* сохраняются все вершины исходного графа и все его ребра, кроме удаляемого. Граф, получаемый из исходного графа Γ удалением ребра e , записывается как $\Gamma \setminus e$. *Добавление ребра* является обратной операцией к удалению ребра. Получаемый в этом случае граф записывается как $\Gamma + e$.

При *удалении вершины* вместе с вершиной удаляются и все инцидентные ей ребра. Граф, получаемый из графа Γ удалением вершины v , обозначают $\Gamma \setminus v$. При *добавлении вершины* к графу добавляется новая изо-

лированная вершина. Получаемый граф записывается как $\Gamma + v$.

Очевидно, что с помощью операций добавления ребер можно любой граф дополнить до полного графа, а с помощью операций удаления ребер – получить пустой граф.

Операция *стягивания ребра* $e = \{u, v\}$ сводится к удалению вершин u и v из исходного графа, а затем добавлению новой вершины w , которая соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна хотя бы одна из вершин u, v . Операция *подразбиения ребра* $e = \{u, v\}$ сводится к удалению ребра e , добавлению новой вершины w и ребер $\{u, w\}, \{w, v\}$.

Алгебраические операции над графами естественным образом определяются над множествами вершин и ребер графа. К ним относятся объединение и пересечение графов, дополнение графа, декартово произведение графов.

Объединение двух графов Γ_1 и Γ_2 определяется как граф $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, у которого $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma) = E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2)$. *Пересечение* двух графов Γ_1 и Γ_2 определяется как граф $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, у которого $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma) = E(\Gamma_1) \cap E(\Gamma_2)$.

Дополнительным графом к графу $\Gamma = (V, E)$ называется граф $\bar{\Gamma} = (V, \bar{E})$ с тем же множеством вершин V , причем две различные вершины в графе Γ являются смежными тогда и только тогда, когда они являются несмежными в графе $\bar{\Gamma}$. Так, например, полный граф является дополнительным графом для пустого графа, и наоборот, т. е. $\overline{O_n} \cong K_n$. Очевидно, что $\overline{\bar{\Gamma}} \cong \Gamma$.

Декартово произведение $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ графов Γ_1 и Γ_2 определяется множеством $V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)$ упорядоченных пар вершин (v, u) таких, что $v \in V(\Gamma_1)$, а $u \in V(\Gamma_2)$. Смежность вершин (v_1, u_1) и (v_2, u_2) в графе Γ задается по следующему правилу:

$$(v_1, u_1) \sim (v_2, u_2) = \begin{cases} v_1 = v_2, & u_1 \sim u_2; \\ u_1 = u_2, & v_1 \sim v_2. \end{cases}$$

Например, $K_2 \times K_2 \cong C_4$. В свою очередь, $C_4 \times K_2$ дает кубический граф, соответствующий графу куба H_3 . В общем случае граф гиперкуба H_n определяется как декартово произведение n графов K_2 . Графы

H_n изучаются в главе 7 как частный случай важного в алгебраической теории графов семейства графов, называемых графами Хэмминга.

Реберный граф $L(\Gamma)$ графа Γ строится следующим образом: любая его вершина соответствует ребру графа Γ , и любые две его вершины являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра в Γ имеют общую вершину. Нетрудно показать, что $L(C_n) = C_n$ для любого $n \geq 3$, а $L(P_n) = P_{n-1}$ для любого $n \geq 2$. Реберный граф полного графа K_n известен как хордальный (триангулированный) граф. Реберный граф k -регулярного графа является $(2k - 2)$ -регулярным графом.

1.6 Подграфы

Граф $\Gamma' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $\Gamma = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. всякий подграф может быть получен из графа удалением некоторых вершин и ребер, при этом, при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей ребра.

Подграф Γ' графа Γ называется *остовным*, если $V' = V$. Остовный подграф получается из исходного графа удалением некоторых ребер.

Важным семейством остовных подграфов графа являются его остовные деревья, играющие важную роль в алгоритмической теории графов, где их также принято называть *каркасами*. Если в связном графе имеются циклы, то у него имеется больше одного каркаса. Определить точное число каркасов связного графа позволяет матричная теорема Кирхгофа, которая приводится в главе 3.

Пусть $U \subseteq V$ есть некоторое подмножество множества вершин графа Γ . Тогда *порожденный подграф* $\Gamma' = \langle U \rangle = (U, E')$ содержит все вершины из множества U , а также все ребра графа Γ , вершины которых принадлежат U . Иными словами, порожденный подграф получается из исходного графа удалением «лишних» вершин. В частности, любой порожденный подграф полного графа будет являться *кликкой*, поскольку все его вершины попарно соединены ребрами. Однако, в общем случае, порожденный подграф может оказаться несвязным.

1.7 Упражнения

1. Оценить сверху число ребер в обыкновенном графе на n вершинах. Показать когда достигается граница.
2. Найти число ребер обыкновенного графа Γ с n вершинами, степени которых есть d_1, d_2, \dots, d_n .
3. Найти число порожденных подграфов в графе с n вершинами.
4. Показать, что любой кратчайший цикл в обыкновенном графе является порожденным подграфом.
5. Доказать, что граф, у которого степень каждой вершины не меньше двух, содержит цикл.
6. Доказать, что граф с n вершинами и с числом ребер больше $n^2/4$ не является двудольным. Описать все двудольные графы с $n^2/4$ ребрами.
7. Доказать, что дополнительный граф к несвязному графу всегда является связным графом. Верно ли обратное утверждение?
8. Найти дополнительные графы к графам $C_4, C_5, P_4, K_{p,q}$.
9. Доказать, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем не существует циклов нечетной длины.
10. Найти реберный граф для графа $K_{1,n}$.
11. Определить степень реберного графа $L(K_n)$.
12. Найти число ребер в реберном графе $L(\Gamma)$, где Γ является обыкновенным графом с n вершинами, степени которых есть d_1, d_2, \dots, d_n .
13. Докажите, что в группе из шести человек всегда найдутся три человека, попарно знакомые друг с другом, или три человека, попарно не знакомые друг с другом.
14. В конце семестра 13 студентов договорились, что на каникулах обменяются обыкновенными письмами (с почтовыми индексами и марками), при этом каждый отправит по три письма. Возможно ли, что каждый получит письма от тех, кому напишет сам?

Глава 2

Матрицы и графы

В этой главе вводятся основные матрицы обыкновенных графов и изучаются их свойства. Дополнительные сведения по линейной алгебре можно найти в книге [88].

2.1 Матрица смежности

Матрица смежности $A(\Gamma)$ графа $\Gamma = (V, E)$ порядка $|V| = n$ определяется как квадратная бинарная матрица размерности $n \times n$, элементы которой задаются следующим образом:

$$A = A(\Gamma) = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, & i \sim j; \\ 0, & i \not\sim j. \end{cases}$$

Всякая матрица смежности является симметричной, с нулевой диагональю. Кроме этого, сумма элементов любой строки матрицы смежности совпадает со степенью соответствующей вершины графа:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \text{deg}(i).$$

С другой стороны, всякой квадратной бинарной симметричной матрице размерности $n \times n$ с нулевой диагональю соответствует обыкновенный граф на n вершинах. В частности, если у такой матрицы все внедиагональные элементы являются единицами, то она соответствует полному графу K_n . Матрица смежности пустого графа O_n содержит только нулевые элементы.

Матрица смежности позволяет определить количество путей заданной длины в графе.

Теорема 2.1.1 Пусть $A = A(\Gamma)$ является матрицей смежности графа Γ с n вершинами и пусть $B = A^k$. Тогда элемент b_{ij} равен количеству (i, j) -путей длины k между вершинами i и j в графе Γ , где $i, j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Проведем индукцией по k . Очевидно, что для $k = 1$ утверждение справедливо: матрица смежности графа содержит информацию о всех путях длины 1 в графе.

Предположим, что утверждение верно для всех целых чисел, меньших k , в частности, для $k - 1$. Пусть $C = A^{k-1}$, тогда имеем:

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^n c_{is} a_{sj},$$

где ненулевое слагаемое c_{is} равно количеству (i, s) -путей длины $k - 1$ в графе, а ненулевой элемент a_{sj} соответствует ребру $\{s, j\}$ в графе. Следовательно, ненулевая величина $c_{is} a_{sj}$ равна количеству (i, j) -путей длины k в графе. \square

Теорема дает несколько важных следствий о количестве замкнутых путей заданной длины в графе. Под *следом* матрицы A размерности $n \times n$ понимается сумма элементов ее главной диагонали:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Следствие 2.1.1 Пусть $A = A(\Gamma)$ является матрицей смежности графа Γ с n вершинами. Тогда количество замкнутых путей длины k в графе Γ равно следу матрицы A^k .

По аналогии с тем, что нулевая степень любого числа равна единице, всякая ненулевая обратимая квадратная матрица A размерности $n \times n$ в нулевой степени дает единичную матрицу I_n . Очевидно, что

$$tr(A^0) = n, \quad tr(A) = 0.$$

По следствию 2.1.1 диагональные элементы матриц A^2 и A^3 дают число замкнутых путей длины два и три, соответственно. В последнем случае при подсчёте следа матрицы возникают циклы C_3 .

Следствие 2.1.2 Пусть $A = A(\Gamma)$ является $(n \times n)$ -матрицей смежности графа Γ с m рёбрами и t циклами длины три. Тогда:

$$\text{tr}(A^2) = 2m, \quad \text{tr}(A^3) = 6t.$$

Пусть x является собственным ненулевым вектором, отвечающим собственному значению λ матрицы смежности $A = A(\Gamma)$ графа Γ . Тогда по спектральной теореме о собственных значениях $(n \times n)$ -матрицы выполняется следующее соотношение:

$$Ax = \lambda x. \tag{2.1}$$

Зная собственные значения матрицы A , всегда можно получить собственные значения матрицы A^k . В самом деле, с учётом (2.1) выполняется следующая цепочка преобразований:

$$A^k x = \lambda A^{k-1} x = \lambda^2 A^{k-2} x = \dots = \lambda^k x.$$

Кроме этого, одно из основных свойств следа квадратной матрицы показывает его связь с собственными значениями матрицы.

Факт 2.1.1 След матрицы смежности A равен сумме всех ее собственных значений:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

и инвариантен относительно любого ортонормированного преобразования.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1.3 Если x является собственным вектором с собственным значением λ матрицы смежности A , то λ^k является собственным значением матрицы A^k с тем же собственным вектором x , при этом:

$$\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

2.2 Матрица инцидентности

Матрица инцидентности $B(\Gamma)$ графа $\Gamma = (V, E)$ с n вершинами и m рёбрами определяется как бинарная матрица размерности $n \times m$, элементы которой задаются следующим образом:

$$B = B(\Gamma) = (b_{ij}) = \begin{cases} 1, & i \in j; \\ 0, & i \notin j, \end{cases}$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Таким образом, единицы в матрице инцидентности указывают на инцидентность вершин и ребер графа.

2.3 Матрица Кирхгофа

Матрица Кирхгофа $K(\Gamma)$ графа $\Gamma = (V, E)$ порядка n определяется как квадратная матрица размерности $n \times n$, элементы которой задаются следующим образом:

$$K = K(\Gamma) = (k_{ij}) = \begin{cases} -1, & i \sim j; \\ 0, & i \not\sim j, i \neq j; \\ \deg(i), & i = j. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что матрица Кирхгофа получается из матрицы смежности заменой 1 на -1 , и заменой нулевых диагональных элементов на степени вершин. При этом, она является вырожденной, поскольку сумма элементов каждой ее строки дает ноль.

Матрица Кирхгофа используется для подсчета каркасов в графе.

Теорема 2.3.1 Пусть $K = K(\Gamma)$ является матрицей Кирхгофа графа Γ с не менее чем двумя вершинами. Тогда алгебраические дополнения всех элементов матрицы K равны между собой и равны числу каркасов графа Γ .

Эта матрица широко используется в спектральной теории графов.

2.4 Упражнения

1. Для обыкновенного графа Γ с матрицей смежности $A(\Gamma)$ найти матрицу смежности $A(\bar{\Gamma})$ его дополнительного графа $\bar{\Gamma}$.
2. Найти граф $\Gamma = (V, E)$ с матрицей смежности A , если известно, что

$$A^2(\Gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Для обыкновенного графа Γ , заданного матрицей инцидентности вида:

$$B(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

найти его матрицу смежности и вычислить число каркасов.

4. По теореме Кирхгофа вычислить число каркасов в полном двудольном графе $K_{p,q}$.
5. Найти число треугольников в полном графе K_n . Для $n = 4$ убедиться, что $tr(A^3(K_4)) = 24$.
6. Найти собственные значения графов K_3, K_4, C_3, C_4 . Убедиться, что за исключением цикла длины три, рассмотренные графы имеют только целые собственные значения, а также найти их кратности.
7. Найти собственные значения и кратности собственных значений полного графа K_n .
8. Доказать, что собственные векторы матрицы смежности обыкновенного графа, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу.

Глава 3

Характеристический полином и спектр графа

В этой главе изучаются свойства характеристического полинома матрицы смежности графа, а также рассматриваются спектры графов. В частности, дается спектральная характеристика двудольных графов. Использование спектров графов демонстрируется при решении задач.

3.1 Характеристический полином

Характеристическим полиномом графа $\Gamma = (V, E)$ порядка n называется характеристический полином от λ его матрицы смежности $A = A(\Gamma)$:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i),$$

где λ_i являются корнями полинома, а I_n является единичной матрицей размерности $n \times n$, т. е. матрицей с единичной диагональю. В тех случаях, когда размерность n не зафиксирована, будем писать I .

Факт 3.1.1 *Корни характеристического полинома $p_A(\lambda)$ являются собственными значениями графа Γ с матрицей смежности $A = A(\Gamma)$.*

Доказательство. Действительно, если уравнение $Ax = \lambda x$ имеет нетривиальное решение, т. е. x является собственным ненулевым вектором,

отвечающим собственному значению λ , то $(\lambda I_n - A)x = 0$. Это означает, что матрица $(\lambda I_n - A)$ является вырожденной, следовательно, ее определитель равен 0. \square

Так, характеристический полином графа P_3 имеет вид $\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$, а его корни $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ являются собственными значениями графа.

Для k -регулярного графа известна следующая теорема о корнях его характеристического полинома.

Теорема 3.1.1 Пусть Γ является k -регулярным графом порядка n . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Вектор $1_n = (1, \dots, 1)^T$ является собственным вектором матрицы смежности $A(\Gamma)$ с собственным значением k , а значит, k является собственным значением характеристического полинома графа Γ .

(2) Модуль любого корня характеристического многочлена графа Γ не превосходит k .

Доказательство. (1) Поскольку граф Γ является k -регулярным, следовательно, в каждой строке матрицы $A = A(\Gamma)$ содержится ровно k единиц, а значит, выполняется равенство $A 1_n = k 1_n$. Таким образом, 1_n является собственным вектором матрицы A с собственным значением k .

(2) Теперь докажем, что модуль любого собственного значения графа Γ не превосходит k . Пусть x является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ матрицы $A(\Gamma)$, и пусть

$$|x_j| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

По определению, для вектора x выполняется равенство $Ax = \lambda x$, в частности, для j -го элемента имеем:

$$|\lambda| |x_j| = |(Ax)_j| = \left| \sum_{i \in N(j)} x_i \right| \leq \sum_{i \in N(j)} |x_i| \leq k |x_j|,$$

где $N(j)$ является окрестностью вершины j . Следовательно,

$$|\lambda| \leq k.$$

\square

Следующий результат дает нижнюю оценку на число различных собственных значений матрицы смежности графа через диаметр графа.

Теорема 3.1.2 Пусть Γ является связным графом диаметра d . Тогда матрица смежности графа Γ имеет как минимум $d + 1$ различных собственных значений.

Доказательство. Пусть $A = A(\Gamma)$ является матрицей смежности связного графа Γ , диаметр которого равен d . Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ являются различными собственными значениями матрицы A , и предположим, что $t \leq d$. Тогда из факта 3.1.1 следует, что минимальный многочлен матрицы A принимает вид:

$$(\lambda_1 I - A) \cdot \dots \cdot (\lambda_t I - A) = 0,$$

а значит, матрица A^t является линейной комбинацией матриц $I, A, A^2, \dots, A^{t-1}$. Отсюда имеем $(a^s)_{ij} = 0$ для всех $s, 1 \leq s \leq t-1$, следовательно, $(a^t)_{ij} = 0$. Предположим, что диаметр графа достигается для вершин i и j . Тогда $(a^d)_{ij} > 0$, что приводит к противоречию. Таким образом, $t > d$. \square

3.2 Спектр графа

Спектром графа Γ называется набор его различных собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ и их кратностей $mul(\lambda_1), \dots, mul(\lambda_k)$:

$$\text{Spec}(\Gamma) = [\lambda_1^{mul(\lambda_1)}, \dots, \lambda_k^{mul(\lambda_k)}].$$

Например, спектр графа P_3 есть $\text{Spec}(P_3) = [-\sqrt{2}^1, 0^1, \sqrt{2}^1]$, а спектр полного графа K_n с n вершинами является целочисленным и имеет вид $\text{Spec}(K_n) = [-1^{(n-1)}, (n-1)^1]$ для любого $n \geq 2$. При $n = 1$ граф K_1 имеет единственное собственное значение, равное нулю.

Вычисление кратностей собственных значений зачастую является непростой задачей. Из линейной алгебры известен следующий факт о кратностях различных собственных значений графа, который можно использовать в качестве проверочного условия при вычислениях.

Факт 3.2.1 Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ являются различными собственными значениями графа порядка n , причём с кратностями $\text{mul}(\lambda_i)$, где $i = 1, \dots, k$, тогда

$$\sum_{i=1}^k \text{mul}(\lambda_i) = n.$$

Задача вычисления кратностей собственных значений упрощается для двудольных графов, что вытекает из следующего результата.

Теорема 3.2.1 *Спектр двудольного графа Γ является симметричным относительно нуля, причем, если λ является собственным значением графа Γ с кратностью $\text{mul}(\lambda)$, то $-\lambda$ также является собственным значением графа Γ с той же кратностью.*

Доказательство. Пусть граф $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ задан на n вершинах с долями, мощности которых a и b . Тогда матрица смежности графа Γ может быть представлена в виде:

$$A(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где B является матрицей размерности $(a \times b)$.

Пусть $x = (u, v)^T$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ графа Γ . Покажем, что вектор $\bar{x} = (u, -v)^T$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $-\lambda$.

Действительно, для собственного вектора x , отвечающего собственному значению λ , выполняется соотношение:

$$Ax = \lambda x,$$

следовательно, из матрицы смежности двудольного графа (3.1) имеем:

$$Bv = \lambda u, \quad B^T u = \lambda v,$$

а значит:

$$B(-v) = -\lambda u, \quad B^T u = -\lambda(-v),$$

откуда следует:

$$A\bar{x} = -\lambda\bar{x},$$

что завершает доказательство. \square

Известный факт из теории графов дает структурную характеристику двудольного графа, а именно: граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит нечетные циклы. Спектральная характеристика двудольного графа дается следующей теоремой.

Теорема 3.2.2 Пусть Γ является связным графом на n вершинах. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Γ является двудольным графом.
- (2) Собственные значения графа Γ появляются в парах так, что $\lambda_i = -\lambda_j$ для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- (3) $\sum_{i=1}^n \lambda_i^t = 0$ для любого нечетного положительного целого t .

Доказательство. Условие (2) вытекает из условия (1) по теореме 3.2.1.

Условие (3) вытекает из условия (2), если заметить, что поскольку выполняется равенство $\lambda_i = -\lambda_j$, то для любого нечетного положительного целого t выполняется также равенство $\lambda_i^t = -\lambda_j^t$, а значит, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^t = 0$.

Теперь покажем, что условие (1) вытекает из условия (3). В самом деле, пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i^t = 0$ для любого нечетного положительного целого t , где λ_i^t является собственным значением матрицы A^t . Тогда по следствию 2.1.3 след матрицы A^t равен нулю, а поскольку матрица A^t содержит только неотрицательные элементы, следовательно, диагональ матрицы A^t содержит только нули. По условию t является нечетным положительным целым числом, значит, в графе нет нечетных циклов. Следовательно, граф является двудольным. \square

В силу симметричности спектр двудольного графа Γ принято также записывать в следующем виде:

$$\text{Spec}(\Gamma) = [\pm\lambda_1^{\text{mul}(\lambda_1)}, \dots, \pm\lambda_k^{\text{mul}(\lambda_k)}].$$

Например, спектр P_3 может быть записан как $\text{Spec}(P_3) = [0^1, \pm\sqrt{2}^1]$. Циклы четной длины являются двудольными графами. Поэтому для 4-циклов и 6-циклов пишем $\text{Spec}(C_4) = [0^2, \pm 2^1]$ и $\text{Spec}(C_6) = [\pm 1^2, \pm 2^1]$.

Два графа называются *изоспектральными*, если их спектры совпадают. Заметим, что изоспектральные графы необязательно являются изоморфными, но изоморфные графы всегда изоспектральными. В качестве примера рассмотрим графы $\Gamma_1 = C_4 \cup K_1$ и $\Gamma_2 = K_{1,4}$. Нетрудно проверить, что $\text{Spec}(\Gamma_1) = \text{Spec}(\Gamma_2) = [-2, 0^3, 2]$, т. е. графы являются изоспектральными, в то время как сами графы не являются изоморфными.

3.3 Собственная функция графа

Пусть f является функцией на вершинах графа, которая соответствует собственному вектору, отвечающему собственному значению λ . Тогда:

$$\sum_{u \in N(v)} f(u) = \lambda f(v),$$

где $N(v)$ является окрестностью вершины v в графе.

3.4 Решение задач со спектрами

Задача 1. *Изменение спектра графа при добавлении одной изолированной вершины.*

Пусть $A = A(\Gamma)$ является матрицей смежности графа Γ порядка n . Тогда матрица смежности $A' = A(\Gamma')$ графа $\Gamma' = \Gamma + v$ порядка $n + 1$ включает в себя матрицу A , а также нулевые строку и столбец, соответствующие изолированной вершине. Следовательно, все собственные значения матрицы A будут являться собственными значениями матрицы A' . При этом, если ноль был собственным значением матрицы A , то его кратность увеличится на единицу. В противном случае, в спектре графа Γ' появится ноль с кратностью один.

В самом деле, кратность собственного значения λ матрицы A вычисляется по формуле:

$$mul(\lambda) = n - \text{rank}(\lambda I_n - A),$$

где $\text{rank}(\lambda I_n - A)$ соответствует размерности максимального ненулевого минора. Очевидно, что если $\lambda = 0$, то $\text{rank}(\lambda I_n - A') = \text{rank}(\lambda I_n - A)$. Следовательно, $\text{rank}(\lambda I_n - A') = n - \text{mul}(\lambda)$ и для собственного значения 0 матрицы A' имеем $\text{mul}(0) = 1 + \text{mul}(0_A)$, где $\text{mul}(0_A)$ соответствует кратности собственного значения 0 матрицы A .

Например, цикл длины четыре имеет спектр $\text{Spec}(C_4) = [0^2, \pm 2^1]$, а спектр графа $\Gamma = C_4 + \{v\}$ будет иметь вид $\text{Spec}(\Gamma) = [0^3, \pm 2^1]$. Спектр цикла длины три имеет вид $\text{Spec}(C_3) = [-1^2, 2^1]$, и добавление изолированной вершины даст спектр вида $\text{Spec}(C_3 + \{v\}) = [-1^2, 0^1, 2^1]$.

Задача 2. *Полный граф K_{10} нельзя «разложить» на три попарно непересекающихся по ребрам графа Петерсена P .*

Полный граф на 10 вершинах содержит 45 ребер. В графе Петерсена 15 ребер. Следовательно, K_{10} может содержать три графа Петерсена, которые попарно не пересекаются по ребрам.

Предположим, что есть такое разложение на три графа Петерсена P_1, P_2, P_3 , матрицы смежности которых обозначим как A_1, A_2, A_3 . Поскольку матрицу смежности графа K_{10} можно представить как $A(K_{10}) = J - I$, где J состоит только из единиц, а I содержит единицы только на диагонали, то имеем следующее равенство:

$$J - I = A_1 + A_2 + A_3.$$

Нетрудно показать, что $\text{Spec}(K_{10}) = [-1^9, 9^1]$ и $\text{Spec}(P) = [-2^4, 1^5, 3^1]$, а единичный вектор является собственным вектором для обоих графов. Пусть U является одномерным собственным пространством единичного вектора. Рассмотрим матрицу смежности A_1 . Собственные векторы, отвечающие собственному значению 1, ортогональны единичному вектору. Следовательно, 5-мерное собственное пространство V_{A_1} лежит в ортогональном дополнении к U . По аналогии, для матрицы A_2 имеем 5-мерное собственное пространство V_{A_2} , лежащее в ортогональном дополнении к U . Таким образом, в 9-мерном пространстве, ортогональном U , лежат

два 5-мерных собственных пространства, т. е.

$$\dim(V_{A_1} \cap V_{A_2}) \geq 5 + 5 - 9 = 1,$$

следовательно, имеется вектор $v \in V_{A_1} \cap V_{A_2}$, являющийся одновременно собственным вектором для пространств V_{A_1} и V_{A_2} , т. е. выполняется равенство $A_1 v = A_2 v = v$. Кроме этого, поскольку вектор v ортогонален единичному вектору, то $Jv = 0$ и мы имеем:

$$A_3 v = (J - I - A_1 - A_2) v = -3v.$$

Следовательно, -3 является собственным значением графа Петерсена P_3 . Однако, спектр графа Петерсена не содержит такое собственное значение. Таким образом, полный граф на десяти вершинах нельзя разложить на три попарно непересекающихся по ребрам графа Петерсена.

3.5 Упражнения

1. Вычислить характеристический полином графа Петерсена. Показать, что на этом графе достигается нижняя оценка теоремы 3.1.2.
2. Доказать, что собственные числа реберного графа не меньше -2 .
3. Найти спектр полного двудольного графа $K_{1,q}$ для произвольного q .
4. Доказать, что спектр полного двудольного графа $K_{p,q}$ является целочисленным, если pq является квадратом целого числа.
5. Убедиться, что не все собственные значения графа Фрухта являются целыми числами.
6. Пусть в графе Γ имеется две вершины i и j с совпадающими окрестностями, т. е. $N(i) = N(j)$. Доказать, что вектор

$$x = (0, \dots, 1, 0, \dots, -1, \dots)^T,$$

где $x_i = 1, x_j = -1$ является собственным вектором матрицы смежности графа Γ , отвечающим собственному значению $\theta = 0$.

Глава 4

Дистанционно регулярные графы

В этой главе рассматриваются важные классы графов, применение которых в теории групп помогло классифицировать простые конечные группы. Они также связаны с локальными геометриями, дизайнами и кодами.

4.1 Дистанционно регулярные графы

Нам понадобятся дополнительные понятия и обозначения, чтобы дать определение дистанционно регулярного графа.

Метрической сферой радиуса i с центром в вершине $v \in V(\Gamma)$ называют множество следующего вида:

$$S_i(v) = \{u \in V(\Gamma) : d(v, u) = i\}.$$

Вершины множества $S_i(v)$ являются i -*окрестностью* вершины $v \in V(\Gamma)$. Представление графа в виде разбиения на i -окрестности относительно некоторой вершины называют *слоевым* представлением графа.

Например, слоевое представление кубического графа Петерсена P , изображенного на рис. 1, относительно любой его вершины v содержит одну вершину в нулевом слое, т. е. $|S_0(v)| = 1$, три вершины в первом слое, т. е. $|S_1(v)| = 3$, и шесть вершин во втором слое, т. е. $|S_2(v)| = 6$. Это верно для любой вершины, поскольку граф является вершинно-транзитивным (см. раздел 6.1). Всего граф Петерсена P имеет 10 вершин, где $|V(P)| = |S_0(v)| + |S_1(v)| + |S_2(v)| = 10$, а его диаметр равен 2.

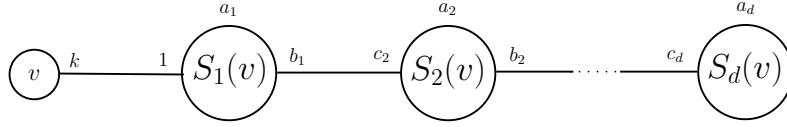


Рис. 2. Схема массива пересечений дистанционно регулярного графа

Пусть $v \in V(\Gamma)$, $u \in S_i(v)$. Введем следующее обозначение:

$$c_i = c_i(v, u) = |\{x \in S_{i-1}(v) : d(x, u) = 1\}|,$$

$$a_i = a_i(v, u) = |\{x \in S_i(v) : d(x, u) = 1\}|,$$

$$b_i = b_i(v, u) = |\{x \in S_{i+1}(v) : d(x, u) = 1\}|.$$

Очевидно, что в k -регулярном графе выполняются следующие очевидные соотношения:

$$a_0 = 0, c_0 = 0, b_0 = k, b_d = 0, c_1 = 1,$$

а кроме этого, имеем:

$$a_i + b_i + c_i = k$$

для любого $i = 0, 1, \dots, d$, где $d = \text{diam}(\Gamma)$.

Определение 4.1.1 *Связный k -регулярный граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений*

$$\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\},$$

если для любого $i = 0, 1, \dots, d$ параметры b_i, c_i не зависят от выбора пары вершин $v, u \in V(\Gamma)$ таких, что $d(v, u) = i$.

Схематическое представление массива пересечений дистанционно регулярного графа выглядит так, как это показано на рис 2.

Простейшими примерами дистанционно регулярных графов являются следующие графы:

- полный граф K_n с массивом пересечений $\{n - 1; 1\}$;
- граф Петерсена с массивом пересечений $\{3, 2; 1, 1\}$;
- полный двудольный граф $K_{3,3}$ с массивом пересечений $\{3, 2; 1, 3\}$;

- циклы C_{2d} и C_{2d+1} четной и нечетной длины диаметра d с массивами пересечений $\{2, 1, \dots, 1; 1, \dots, 1, 2\}$ и $\{2, 1, \dots, 1; 1, \dots, 1, 1\}$.

Пусть $\Gamma = (V, E)$ является дистанционно регулярным графом порядка n и диаметра d . Тогда для любого расстояния $i = 1, \dots, d$ можно определить граф $\Gamma_i = (V, E_i)$, в котором две вершины v и u являются смежными тогда и только тогда, когда $d(v, u) = i$. Таким образом, имеем последовательность графов $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_d$, где $\Gamma_1 \cong \Gamma$, а также последовательность их матриц дистанционной связности A_1, A_2, \dots, A_d , задаваемых следующим образом:

$$A_i = ((a_i)_{vu}) = \begin{cases} 1, & d(v, u) = i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что если положить $A_0 = I$, то в сумме все $d+1$ матрицы дают матрицу всех единиц:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_d = J.$$

Приведем некоторые известные факты об этих матрицах, а также о собственных значениях дистанционно регулярного графа.

Факт 4.1.1 Пусть $\Gamma = (V, E)$ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{k, b_1, \dots, b_{d-1}; 1, c_2, \dots, c_d\}$. Тогда для любого $i = 0, 1, \dots, d$ выполняется следующее соотношение:

$$A \cdot A_i = b_{i-1} \cdot A_{i-1} + a_i \cdot A_i + c_{i+1} \cdot A_{i+1},$$

где $A_{-1} = A_{d+1} = 0$, т. е. матрицы всех нулей.

Отсюда следует, что A_i является полиномиальной функцией от A степени i для любого $i = 2, \dots, d$.

Факт 4.1.2 Матрица смежности дистанционно регулярного графа имеет в точности $d+1$ различных собственных значений, а именно - собственные значения трехдиагональной матрицы пересечений следующе-

го вида:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{d-1} & b_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_d & a_d \end{pmatrix},$$

при этом максимальным собственным значением является k .

4.2 Сильно регулярные графы

Рассмотрим k -регулярный граф Γ с v вершинами.

Определение 4.2.1 *Граф Γ называется сильно регулярным с параметрами (v, k, λ, μ) , если любые его две смежные вершины имеют λ общих соседей, а любые две несмежные вершины имеют μ общих соседей.*

Из определения дистанционно регулярного графа следует, что $\lambda = a_1$, $\mu = c_2$. Таким образом, сильно регулярный граф является дистанционно регулярным графом диаметра два (при условии, что $\mu \neq 0$).

По определению, всякий сильно регулярный граф является регулярным. Однако, обратное не всегда верно. Наименьшим регулярным, но не сильно регулярным графом является, например, цикл длины шесть C_6 .

Между параметрами сильно регулярного графа имеется связь.

Теорема 4.2.1 *Параметры (v, k, λ, μ) сильно регулярного графа не являются независимыми и удовлетворяют следующему условию:*

$$(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1).$$

Доказательство. Рассмотрим слоевое представление $S_0(v), S_1(v), S_2(v)$ сильно регулярного графа относительно любой вершины v . Очевидно, что $|S_0(v)| = 1$, а $S_1(v) = k$. Посчитаем мощность слоя $S_2(v)$. Поскольку все вершины первого слоя смежны с вершиной v , то они должны иметь λ соседей из того же первого слоя. Следовательно, из каждой вершины слоя $S_1(v)$ идет $k - \lambda - 1$ ребро в слой $S_2(v)$, т. к. граф является

k -регулярным. С другой стороны, вершины из второго слоя имеют μ соседей с вершиной v и все они принадлежат первому слою.

Таким образом, каждая вершина второго слоя смежна с μ вершинами первого слоя, а каждая из k вершин первого слоя связана с $k - \lambda - 1$ вершиной из второго слоя, что дает число вершин во втором слое:

$$|S_2(v)| = \frac{k(k - \lambda - 1)}{\mu}.$$

Всего вершин в графе:

$$v = 1 + k + \frac{k(k - \lambda - 1)}{\mu},$$

что дает нужное выражение:

$$(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1)$$

и завершает доказательство. \square

Матричное представление сильно регулярного графа задается следующей теоремой.

Теорема 4.2.2 *Граф $\Gamma = (V, E)$ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) тогда и только тогда, когда Γ является обыкновенным графом и выполняется следующее матричное уравнение:*

$$A^2 = k \cdot I + \lambda \cdot A + \mu \cdot \bar{A}, \quad (4.1)$$

где A является матрицей смежности графа Γ , а $\bar{A} = J - I - A$ является матрицей смежности графа $\bar{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $B = A^2$. Тогда по Теореме 2.1.1 о количестве путей заданной длины между вершинами i и j в графе, матричные элементы b_{ij} однозначно определяются параметрами графа Γ следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} k, & i = j; \\ \lambda, & i, j \in E(\Gamma); \\ \mu, & i, j \notin E(\Gamma), \end{cases}$$

поскольку $b_{ij} = |S_1(i) \cap S_1(j)|$, где метрические сферы $S_1(i)$ и $S_1(j)$ содержат соседей вершин i и j , соответственно. \square

Таким образом, в матричном представлении (4.1) сильно регулярного графа его параметры задают разложение матрицы A^2 с учетом смежных и несмежных вершин графа.

Матричное представление (4.1) является одним из важнейших свойств сильно регулярного графа, которое часто используется при доказательстве утверждений о таких графах. В частности, это представление позволяет легко вычислить параметры графа, являющегося дополнительным графом к исходному сильно регулярному графу.

Теорема 4.2.3 Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) . Тогда граф $\bar{\Gamma}$ также является сильно регулярным графом с параметрами $(v, v - k - 1, v - 2 - 2k + \mu, v - 2k + \lambda)$.

Доказательство. В самом деле, поскольку $\bar{A} = J - I - A$, то по теореме 4.2.2 о матричном представлении сильно регулярного графа имеем следующее выражение для графа $\bar{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \bar{A}^2 &= (J - I - A)^2 = \\ &= (v - k - 1) \cdot I + (v - 2 - 2k + \mu) \cdot A + (v - 2k + \lambda) \cdot \bar{A}, \end{aligned}$$

которое соответствует матричному представлению сильно регулярного графа и дает его параметры, что завершает доказательство теоремы. \square

Всякий сильно регулярный граф является регулярным, следовательно, по теореме 3.1.1 степень k является его максимальным собственным значением с кратностью один. Два других собственных значения r и s определяются при решении матричного уравнения (4.1), которое может быть записано в следующем виде:

$$A^2 + (\mu - \lambda) \cdot A + (\mu - k) \cdot I = \mu \cdot J,$$

и имеют вид:

$$r, s = \frac{(\lambda - \mu) \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}}{2},$$

кратности которых, соответственно, вычисляются по формулам

$$f, g = \frac{1}{2} \left(v - 1 \mp \frac{(r + s)(v - 1) + 2k}{r - s} \right).$$

В том случае, если r и s не являются целыми значениями, то

$$r, s = \frac{-1 \pm \sqrt{v}}{2}$$

с кратностями $\frac{(v-1)}{2}$.

Например, спектр графа Петерсена P имеет вид $\text{Spec}(P) = [-2^4, 1^5, 3^1]$, т. е. все его собственные значения являются целыми. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ является сильно регулярным графом с параметрами $(6, 3, 0, 3)$, спектр которого также содержит только целые значения и имеет вид $\text{Spec}(K_{3,3}) = [-3^1, 0^4, 3^1]$.

В общем случае, полный двудольный граф $K_{n,n}$ является сильно регулярным графом с параметрами $(2n, n, 0, n)$ и целочисленным спектром $\text{Spec}(K_{n,n}) = [-n^1, 0^{2n-2}, n^1]$.

Реберный граф $L(K_{n,n})$ полного двудольного графа $K_{n,n}$ также является сильно регулярным графом с параметрами $(n^2, 2n - 2, n - 2, 2)$, спектр которого имеет следующий вид:

$$\text{Spec}(L(K_{n,n})) = [(-2)^{(n-1)^2}, (n-2)^{2n-2}, (2n-2)^1].$$

Граф $L(K_{n,n})$ известен как решеточный граф, свойства которого подробно рассматриваются в разделе 7.1.

К нецелочисленным сильно регулярным графам относятся так называемые *графы в половинном случае*, параметры которых зависят только от v и имеют вид $(v, \frac{v-1}{2}, \frac{v-5}{4}, \frac{v-1}{4})$, где v не является квадратом некоторого числа. В частности, цикл длины пять C_5 с параметрами $(5, 2, 0, 1)$ имеет следующий спектр:

$$\text{Spec}(C_5) = \left[\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2, \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2, 2^1 \right],$$

в котором два собственных значения не являются целыми.

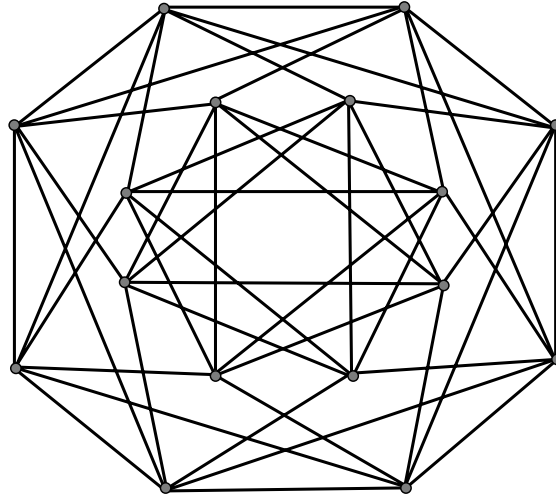


Рис. 3. Граф Шрикханде: сильно регулярный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$

Одни и те же параметры могут иметь неизоморфные сильно регулярные графы. Так, например, параметры $(16, 6, 2, 2)$ имеют граф Шрикханде, представленный на рис. 3, и реберный граф $L(K_{4,4})$ полного двудольного графа $K_{4,4}$. Оба эти графа имеют один и тот же целочисленный спектр $[-2^9, 2^6, 6^1]$, т. е. являются изоспектральными.

Однако, имеются сильно регулярные графы, однозначно определяемые своими параметрами. К ним относятся: цикл длины пять C_5 с параметрами $(5, 2, 0, 1)$, граф Петерсена с параметрами $(10, 3, 0, 1)$, граф Хоффмана-Синглтона с параметрами $(50, 7, 0, 1)$.

Все эти графы имеют отношение к графам Мура.

4.3 Графы Мура

В 1957 году Эдвард Мур пытался решить задачу поиска пути в лабиринте, а попутно придумал хорошо известную процедуру поиска в ширину. Основная идея этой процедуры состоит в том, что в процессе обхода вершин графа мы идем вширь, т. е. перед тем как приступить к поиску вершин на расстоянии $i + 1$, выполняется обход всех вершин на расстоянии i от некоторой выделенной вершины. Нетрудно показать, что для всякого k -регулярного графа диаметра d с n вершинами выполняется

следующее неравенство:

$$n \leq 1 + k + k(k - 1) + \dots + k(k - 1)^{d-1} \quad (4.2)$$

Действительно, если рассмотреть слоиое представление графа относительно некоторой вершины v , то можно заметить, что в нулевом слое содержится одна вершина, в первом слое будет k вершин, а во втором слое будет не более $k(k - 1)$ вершин, поскольку каждый сосед вершины v может иметь только $k - 1$ соседей во втором слое. Тогда в i -м слое вершин будет не более, чем $k(k - 1)^{i-1}$, где $1 \leq i \leq d$. Мур поставил вопрос описания и классификации графов, для которых в неравенстве (4.2) достигается равенство.

Определение 4.3.1 *Графы, для которых в (4.2) достигается равенство, называются графами Мура с параметрами (k, d) .*

Графы Мура диаметра d имеют нечетный обхват, равный $2d + 1$, где под *обхватом* $g(\Gamma)$ понимается длина кратчайшего цикла в графе Γ . При этом, число циклов длины $2d + 1$ в графе Мура с n вершинами и m ребрами равно $\frac{n}{2d+1}(m - n + 1)$. Очевидно, что если $d = 1$, то полный граф K_n , $n \geq 3$, является графом Мура с параметрами $(n - 1, 1)$ и с обхватом $g(K_n) = 3$, в котором $\frac{n(n^2 - 3n + 2)}{6}$ циклов длины три.

В 1960 году Алан Хоффман и Роберт Синглетон доказали следующие утверждения [44].

Факт 4.3.1 *Графы Мура диаметра три не существуют, а графы Мура диаметра два должны иметь степень, равную 2, 3, 7 или 57.*

Факт 4.3.2 *Граф Мура с параметрами $(2, 2)$ изоморфен циклу длины пять, а граф Мура с параметрами $(3, 2)$ изоморфен графу Петерсена.*

Кроме этого, они построили граф Мура с параметрами $(7, 2)$, называемый теперь графом Хоффмана-Синглтона. Он является единственным сильно регулярным графом с параметрами $(50, 7, 0, 1)$. В целом, все эти графы являются не только дистанционно регулярными, но и дистанционно-транзитивными (см. раздел 6.2).

Известен также следующий факт [13, 26].

Факт 4.3.3 *Не существуют графы Мура с параметрами (k, d) , где $k > 2$ и $d \geq 4$.*

Нечетные циклы C_{2d+1} диаметра d и обхвата $2d + 1$ являются примерами графов Мура степени $k = 2$.

Открытым остается вопрос о существовании графа Мура обхвата пять со степенью 57. В 1971 году Майкл Ашбахер [6] показал, что если такой граф существует, то он не может быть дистанционно-транзитивным. Помимо этого, Грэм Хигман доказал (см. [20]), что такой граф не может быть и вершинно-транзитивным. Таким образом, если такой граф будет найден, то он будет являться примером дистанционно регулярного, но не вершинно-транзитивного графа (см. раздел 6.1).

При рассмотрении графов Мура возникли новые понятия графов, а именно - вершинно-транзитивные и дистанционно-транзитивные графы. Эти графы являются предметом обсуждения следующей главы.

4.4 Упражнения

1. Построить слоевое представление графа Петерсена: а) относительно вершины; б) относительно ребра. Убедиться, что граф Петерсена является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{3, 2; 1, 2\}$.
2. Найти различные собственные значения дистанционно регулярного графа $K_{3,3}$. Сколько их? Какова кратность собственного значения ноль?
3. Привести примеры кубических дистанционно регулярных графов.
4. Привести пример неизоморфных сильно регулярных графов с одним и тем же набором параметров. Являются ли они изоспектральными?
5. Показать, что характеристический полином графа в половинном случае с параметрами $(9, 4, 1, 2)$ имеет вид $(x - 4)(x - 1)^4(x + 2)^4$.
6. Найти условия, при которых сильно регулярный граф и его дополнение (по теореме 4.2.3 является сильно регулярным графом) будут иметь одни и те же параметры. Привести пример такой пары графов.

Глава 5

Группы и графы

В этой главе мы вводим основные понятия теории групп, а также рассматриваем группы автоморфизмов графа.

5.1 Основные понятия

Группой называется множество элементов G с бинарной операцией \circ на нем, такое, что выполняются следующие аксиомы:

Аксиома 1 (замкнутость). Для любых элементов $f, g \in G$ выполняется: $f \circ g \in G$.

Аксиома 2 (ассоциативность). Для любых элементов $f, g, h \in G$ верно: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Аксиома 3 (о нейтральном элементе). В группе G существует элемент e такой, что: $g \circ e = e \circ g = g$.

Аксиома 4 (об обратном элементе) Для любого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$ такой, что: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Если бинарная операция является коммутативной, т. е. для любых элементов $g, h \in G$ выполняется $g \circ h = h \circ g$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Обычно под бинарной операцией понимается сложение или умножение элементов. При умножении элементов f и g результат бинарной операции обозначается fg . Это *мультипликативная* запись. *Аддитивная* запись

$f+g$ используется, когда результатом бинарной операции является сумма двух элементов.

При мультипликативной записи нейтральный элемент группы традиционно называется единицей и обозначается e . При аддитивной записи нейтральный элемент называется нулем и обозначается 0 .

Простейшими примерами групп являются числовые группы, к которым относятся все числовые системы. В частности, целые \mathbb{Z} , рациональные \mathbb{Q} , действительные \mathbb{R} , комплексные числа \mathbb{C} образуют аддитивные абелевы группы. Ненулевые рациональные \mathbb{Q}^* , действительные \mathbb{R}^* , комплексные числа \mathbb{C}^* образуют мультипликативные абелевы группы.

Если множество G является конечным, то группа G называется *конечной*. *Порядок* конечной группы определяется числом элементов в ней. Под *порядком элемента* $g \in G$ понимается наименьшее натуральное число k такое, что $g^k = e$.

Пусть G является конечной группой и пусть $S \subset G$. Множество S называется *порождающим множеством* группы, а его элементы - *порождающими*, если любой элемент группы G может быть представлен как конечная последовательность порождающих (с учетом бинарной операции на группе). Порождающее множество группы также принято называть *системой образующих*. Группа G , порожденная множеством S , обозначается как $G = \langle S \rangle$.

Например, конечная аддитивная группа \mathbb{Z}_n целых чисел по модулю n порождается каждым из взаимно простых с n элементов.

Конечная группа G называется *циклической*, если она может быть порождена одним элементом g , т. е. элементы группы являются степенями g . Например, элементы циклической группы порядка три могут быть записаны в виде: $g, g \circ g = g^2, g \circ g \circ g = g^3 = e$.

Гомоморфизм групп из (G, \circ) в $(H, *)$ определяется как отображение $\varphi : G \rightarrow H$, при котором сохраняется бинарная операция, т. е. образ произведения равняется произведению образов $\varphi(f * g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$, где $f, g \in G$. *Ядро* гомоморфизма группы G определяется как множество элементов из G , которые отображаются в нейтральный элемент в H .

Если гомоморфизм групп из G в H является биективным, то группы G

и H называются *изоморфными*, т. е. при изоморфизме двух групп имеется взаимно-однозначное соответствие между элементами этих групп, сохраняющее групповые операции. Очевидно, что ядро изоморфизма является тривиальным. Если группы G и H изоморфны, то пишут $G \cong H$.

Например, группа всех вещественных чисел по сложению изоморфна группе всех положительных вещественных чисел по умножению. Другим примером изоморфных групп являются все конечные циклические группы заданного порядка.

Подгруппой H группы G называется подмножество $H \subset G$, являющееся группой относительно групповой операции G . Например, $\{e\}$ и $\{G\}$ являются примерами подгрупп группы G , где $\{e\}$ содержит нейтральный элемент группы G и называется *тривиальной* подгруппой.

Рассмотрим конечную группу G порядка n и ее подгруппу $H \subset G$. *Левым* и *правым смежными классами* группы G по подгруппе H называют множества $gH = \{gh, h \in H\}$ и $Hg = \{hg, h \in H\}$, где $g \in G$. Элементы из gH и Hg называются представителями смежного класса. Подгруппа называется *нормальной*, если $gH = Hg$ для любого $g \in G$.

5.2 Диэдральная группа

Различных групп существует очень много. Помимо простейших числовых групп выделяют также группы преобразований и группы симметрии (см. [86]), к последним относится группа симметрий правильной призмы (правильного m -угольника).

Диэдральная группа (группа диэдра) D_m состоит из $2m$ элементов, m из которых являются поворотами на угол $2\pi k/m$, $0 \leq k < m$, а другие m есть отражения относительно прямых, проходящих через вершины m -угольника и его центр, а также через середины сторон m -угольника и его центр. Порождающее множество диэдральной группы D_m состоит из двух преобразований: поворота на угол $2\pi/m$ и любого из отражений. Таким образом, группа D_m состоит из вращений и отражений правильного m -угольника. В алгебре данную группу принято обозначать D_{2m} .

5.3 Симметрическая группа

Важным примером конечных групп является симметрическая группа.

Перестановкой π на множестве $X = \{1, \dots, n\}$ называется взаимно однозначное отображение множества X на себя. Обычно перестановку π представляют в виде таблицы:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}$$

и называют *подстановкой*.

Будем записывать перестановку π в одну строку в виде $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n]$, где $\pi_i = \pi(i)$ является образом элемента i для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Произведением двух перестановок $\pi \tau$ является перестановка, которая получается применением перестановки τ , а затем перестановки π . Эта операция также называется композицией отображений, а порядок умножения справа налево соответствует порядку записи композиции функций: $(\pi \tau)(i) = (\pi(\tau(i)))$.

Группа всех $n!$ перестановок на множестве $\{1, \dots, n\}$ называется *симметрической группой* степени n и обозначается Sym_n .

Бинарной операцией на этой группе является операция произведения перестановок, а нейтральный элемент соответствует тождественной перестановке $I = [12 \dots n]$.

Симметрическая группа некоммутативна при $n \geq 3$. Легко убедиться, что $[231][132] = [213] \neq [321] = [132][231]$.

Симметрическая группа Sym_n обладает различными системами образующих, в частности, такую систему образуют транспозиции двух соседних элементов. Множество $S = \{(12), (23), \dots, (n-1n)\}$ известно как $(n-1)$ -множество Коксетера, порождающее группу Sym_n . Оно играет важную роль в комбинаторике групп Коксетера [16].

Подгруппа симметрической группы Sym_n , состоящая только из четных перестановок, называется *знакопеременной группой* и обозначается A_n . Порядок этой группы равен $n!/2$. Группа A_n является нормальной подгруппой группы Sym_n .

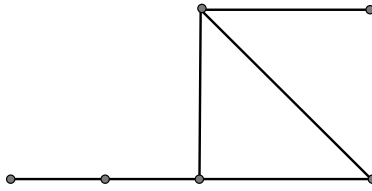


Рис. 4. Асимметричный граф

5.4 Группа автоморфизмов графа

Автоморфизмом графа $\Gamma = (V, E)$ называется отображение α множества вершин на себя, сохраняющее смежность, т. е. если $\{u, v\}$ является ребром Γ , то и $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$ является ребром Γ .

Очевидно, что автоморфизм переводит друг в друга только вершины, имеющие одинаковые степени.

Граф $\Gamma = (V, E)$ называется *асимметричным*, если у него имеется единственный тождественный автоморфизм на множестве вершин. Асимметричных графов на двух, трех, четырех и пяти вершинах не существует. Первый асимметричный граф появляется при $n = 6$.

На рис. 4 представлен один из восьми асимметричных графов на шести вершинах. Очевидно, что ни одна вершина этого графа не может быть отображена в другую с сохранением смежности вершин графа.

В целом, число асимметричных графов с заданным числом вершин $n \geq 6$ определяется последовательностью A003400 в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей: <https://oeis.org/A003400>.

Множество автоморфизмов графа Γ образует *вершинную группу автоморфизмов* графа или просто *группу автоморфизмов* графа, которую обозначают $\text{Aut}(\Gamma)$. Группа автоморфизмов на множестве ребер называется *реберной группой автоморфизмов* графа.

Заметим, что вершинный автоморфизм естественным образом индуцирует реберный автоморфизм.

В самом деле, рассмотрим граф Γ на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ с ребрами $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{2, 3\}$, $e_3 = \{3, 4\}$, $e_4 = \{1, 4\}$, $e_5 = \{2, 4\}$.

Нетрудно показать, что его вершинная группа автоморфизмов состоит из перестановок следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

При этом, также нетрудно показать, что соответствующие реберные автоморфизмы индуцируются вершинными автоморфизмами так, что имеем следующую реберную группу автоморфизмов данного графа:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что реберная и вершинная группы автоморфизмов рассмотренного графа Γ изоморфны, но не идентичны, поскольку степени этих групп различаются.

Необходимое и достаточное условие изоморфизма реберной и вершинной групп автоморфизмов графа формулируется следующей теоремой.

Теорема 5.4.1 *Реберная и вершинная группы автоморфизмов графа Γ изоморфны тогда и только тогда, когда граф Γ имеет не более одной изолированной вершины, а граф K_2 не является его компонентой.*

Доказательство. Рассмотрим вершинную $\text{Aut}(\Gamma)$ и реберную $\text{Aut}'(\Gamma)$ группы автоморфизмов графа Γ . Пусть перестановка $\pi' \in \text{Aut}'(\Gamma)$ индуцируется перестановкой $\pi \in \text{Aut}(\Gamma)$. Тогда, из определения умножения в $\text{Aut}'(\Gamma)$ следует, что $\pi' \tau' = (\pi \tau)'$ для любых $\pi, \tau \in \text{Aut}(\Gamma)$, т. е. отображение индуцирования является групповым гомоморфизмом из группы $\text{Aut}(\Gamma)$ в группу $\text{Aut}'(\Gamma)$. Следовательно, $\text{Aut}(\Gamma) \cong \text{Aut}'(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда ядро этого отображения тривиально.

Для доказательства необходимости утверждения предположим, что $\text{Aut}(\Gamma) \cong \text{Aut}'(\Gamma)$, т. е. если $\pi \neq I$, то и $\pi' \neq I$. Если предположить, что в графе Γ имеется две изолированные вершины v_1 и v_2 , то можно определить подстановку $\pi \in \text{Aut}(\Gamma)$, отличную от тождественной, следующим образом: положим $\pi(v_1) = v_2$ и $\pi(v_2) = v_1$, а $\pi(v) = v$ для всех остальных вершин $v \neq v_1, v_2$. Но тогда $\pi' = I$, получили противоречие. Аналогично, если предположить, что $K_2 \cong \{v_1, v_2\}$ и задать перестановку $\pi \in \text{Aut}(\Gamma)$

как показано выше, то вновь получим противоречие. Следовательно, если вершинная и реберная группы автоморфизмов графа изоморфны, то в графе может быть только одна изолированная вершина, а граф K_2 не может быть его компонентой.

Теперь докажем достаточность утверждения и предположим, что граф имеет не более одной изолированной вершины и K_2 не является его компонентой. Покажем, что вершинная и реберная группы автоморфизмов графа являются изоморфными. В самом деле, если группа $\text{Aut}(\Gamma)$ является тривиальной, то и группа $\text{Aut}'(\Gamma)$ тоже является тривиальной, поскольку каждое ребро остается на месте. Предположим, что в вершинной группе автоморфизмов найдется перестановка $\pi \in \text{Aut}(\Gamma)$, для которой $\pi(u) = v$, где $u \neq v$. Следовательно, вершины u и v имеют одну и ту же степень. Кроме этого, поскольку по предположению граф имеет не более одной изолированной вершины, следовательно, вершины u и v не могут быть изолированными, а значит, их степени не равны нулю, т. е. $\text{deg}(u) = \text{deg}(v) \neq 0$.

Возможны следующие два случая.

Если $u \sim v$, то в графе имеется ребро $\{u, v\}$. Но поскольку K_2 не является компонентой графа, то степени вершин u и v должны быть строго больше единицы, т. е. $\text{deg}(u) = \text{deg}(v) > 1$. Следовательно, в графе имеется такое ребро f , инцидентное вершине u , что ребро $\pi'(f)$ инцидентно вершине v , а значит, $\pi'(f) \neq f$. Таким образом, $\pi' \neq I$.

Если $u \not\sim v$, то для произвольного ребра e , инцидентного вершине u , выполняется $\pi'(e) \neq e$, а значит, $\pi' \neq I$.

Таким образом, если граф имеет не более одной изолированной вершины, а K_2 не является его компонентой, то вершинная и реберная группы автоморфизмов являются изоморфными, что завершает доказательство теоремы. \square

Рассмотрим несколько примеров графов и их групп автоморфизмов.

Нетрудно показать, что $\text{Aut}(K_1) \cong \text{Sym}_1$, $\text{Aut}(K_2) \cong \text{Sym}_2$, а в более общем виде, Sym_n является группой автоморфизмов полного графа K_n на n вершинах. Симметрическая группа степени n является также группой автоморфизмов для пустого графа O_n на n вершинах. Кроме этого,

известно, что Sym_5 является группой автоморфизмов графа Петерсена, поскольку любой гомоморфизм графа Петерсена на себя, не отождествляющий смежные вершины, является автоморфизмом. При этом, в графе Петерсена имеется пять независимых множеств вершин, что и дает Sym_5 .

Граф, группа автоморфизмов которого содержит циклическую подгруппу, действующую транзитивно на вершинах графа, называется *циркулянтным графом* или *циркулянтном*. Очевидно, к циркулянтам относятся цикл, полный граф, полный двудольный граф с равными долями.

В 1938 году Роберт Фрухт доказал следующее утверждение.

Факт 5.4.1 *Любая конечная группа изоморфна группе автоморфизмов некоторого конечного неориентированного графа.*

Например, диэдральная группа D_m является группой автоморфизмов цикла длины m , $m \geq 3$, поскольку она состоит из вращений и отражений правильного m -угольника (см. раздел 5.2).

Таким образом, всякий 2-регулярный граф, являющийся циклом, не является асимметричным. Однако, среди кубических графов существует бесконечно много асимметричных графов. Примером кубического графа, на котором реализуется тривиальная группа, является граф Фрухта, изображённый на рис. 1.

О графах с богатой группой автоморфизмов поговорим в следующей главе.

5.5 Упражнения

1. Описать все неизоморфные группы на 10 элементах.
2. Доказать, что конечная циклическая группа заданного порядка изоморфна конечной аддитивной группе \mathbb{Z}_n целых чисел по модулю n .
3. Выписать все порождающие множества конечной аддитивной группы \mathbb{Z}_6 . Каково минимальное порождающее множество?

4. Для конечной аддитивной группы \mathbb{Z}_{10} построить все ее левые смежные классы по подгруппе $H = \{0, 5\}$. Является ли данная подгруппа H нормальной?
5. Для диэдральной группы D_8 описать все ее элементы, соответствующие вращениям и отражениям правильного 8-угольника.
6. Привести примеры элементов порядка два в симметрической группе Sym_n всех $n!$ перестановок.
7. Привести примеры порождающих множеств симметрической группы Sym_n для произвольного n . Каково минимальное порождающее множество для $\text{Sym}_3, \text{Sym}_4$?
8. Доказать, что знакопеременная группа является нормальной подгруппой симметрической группы.
9. Доказать, что группа автоморфизмов графа Петерсена изоморфна симметрической группе Sym_5 . Привести примеры других графов с группой автоморфизмов Sym_5 .
10. Привести примеры кубических графов с тривиальной группой автоморфизмов.
11. Привести примеры ациклических графов (деревьев) с богатой группой автоморфизмов. Сколько автоморфизмов у графа $K_{1,q}$?
12. Сколько автоморфизмов у полного двудольного графа $K_{p,q}$, $p \neq q$? Совпадает ли группа автоморфизмов этого графа с группой автоморфизмов графа $K_{p,p}$?
13. Найти группу автоморфизмов графа, соответствующего кубику. Таким графом является, например, граф H_3 , изображенный на рис. 10 (частный случай графа Хэмминга).
14. Найти группу автоморфизмов графа, изображенного на рис. 5. Показать, что вершина u переводится подходящими автоморфизмами в вершины v, u', v' . Показать, что любая пара этих вершин переводится друг в друга подходящим автоморфизмом. Показать, что не существует автоморфизма, переводящего ребро $\{u, v\}$ в $\{u', v'\}$.

Глава 6

Транзитивные графы

Основная цель этой главы состоит в рассмотрении транзитивного действия группы на графе, позволяющего изучать симметричные графы. В частности, в главе рассматриваются графы на группах, называемые графами Кэли, а также изучаются их свойства.

6.1 Вершинно- и реберно-транзитивные графы

Действие группы G называется *транзитивным* на множестве элементов X , если для любых элементов $a, b \in X$ существует элемент $g \in G$ такой, что выполняется $g(a) = b$. Граф $\Gamma = (V, E)$ называется *симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на упорядоченных парах смежных вершин.

Примером кубического симметричного графа является граф Петерсена (см. рис. 1), поскольку любую пару его смежных вершин можно перевести автоморфизмом в любую другую пару вершин.

Связный граф $\Gamma = (V, E)$ называется *вершинно-транзитивным*, если для любых двух вершин $u, v \in V(\Gamma)$ существует автоморфизм α такой, что $\alpha(u) = v$.

Факт 6.1.1 *Всякий вершинно-транзитивный граф является регулярным, но не всякий регулярный граф является вершинно-транзитивным.*

Первое утверждение следует непосредственно из определения вершинно-транзитивного графа. Второе утверждение подтверждается тем фак-

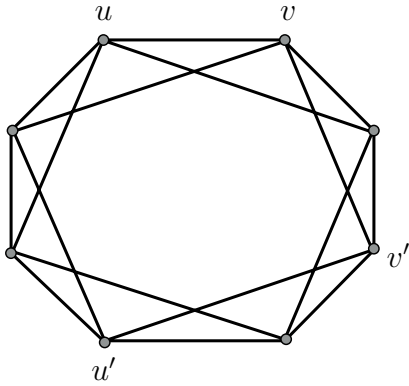


Рис. 5. Вершинно-транзитивный, но не реберно-транзитивный граф

том, что граф Фрухта является 3-регулярным, но не вершинно-транзитивным графом, поскольку у этого графа не существует нетривиальных автоморфизмов (см. рис. 1).

Связный граф Γ называется *реберно-транзитивным*, если для любой пары ребер $x, y \in E(\Gamma)$ существует автоморфизм α такой, что $\alpha(x) = y$.

Свойства вершинной и реберной транзитивности не являются взаимозаменяющими, поскольку имеются вершинно-транзитивные графы, не являющиеся реберно-транзитивными, и наоборот. Полный двудольный граф $K_{p,q}$, где $p \neq q$, является примером реберно-транзитивного, но не вершинно-транзитивного графа. Однако, граф $K_{p,q}$ является вершинно-транзитивным и реберно-транзитивным в случае, когда $p = q$.

На рис. 5 изображен вершинно-транзитивный граф, который не является реберно-транзитивным графом, поскольку отсутствует автоморфизм, переводящий ребро $\{u, v\}$ в ребро $\{u', v'\}$. В самом деле, окрестность ребра $\{u, v\}$ содержит 4 вершины, в то время как окрестность ребра $\{u', v'\}$ содержит 5 вершин, что говорит о том, что не существует автоморфизма, переводящего одно ребро в другое. В целом, группа автоморфизмов этого графа изоморфна диэдральной группе D_8 .

Факт 6.1.2 *Любой связный симметричный граф является вершинно-транзитивным и реберно-транзитивным, однако не всякий вершинно- и реберно-транзитивный граф является симметричным.*

Первое утверждение следует непосредственно из определения симмет-

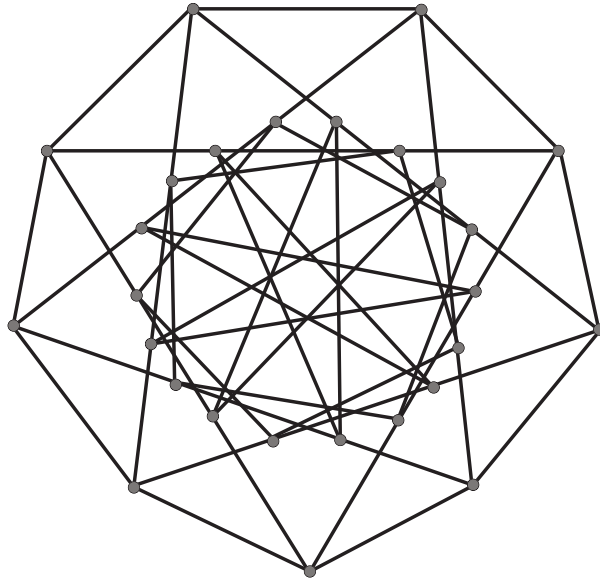


Рис. 6. Граф Холта: вершинно- и реберно-транзитивный,
но не симметричный граф

ричного графа. Второе утверждение подтверждается тем фактом, что граф Холта, представленный на рис. 6, является наименьшим примером вершинно-транзитивного и реберно-транзитивного графа, который не является симметричным. Его группа автоморфизмов имеет наименьший порядок 54 среди всех графов с 27 вершинами и 54 ребрами. Граф носит имя Дерека Ф. Холта, построившего этот граф в 1981 году [45]. Заметим, что такие графы встречаются достаточно редко.

Теперь рассмотрим связь между вершинно-транзитивными и дистанционно регулярными графами. Тут возможны все варианты. Простейшими примерами дистанционно регулярных и вершинно-транзитивных графов являются, например, полные графы, циклы, граф Петерсена. К более сложным можно отнести графы Хэмминга и Джонсона, которые подробно рассматриваются в главе 7. Там же рассматриваются графы Кнезера, среди которых имеются примеры вершинно-транзитивных, но не дистанционно регулярных графов. И наконец, среди графов Мура, рассмотренных в разделе 4.3, возможно существование дистанционно регулярного, но не вершинно-транзитивного графа.

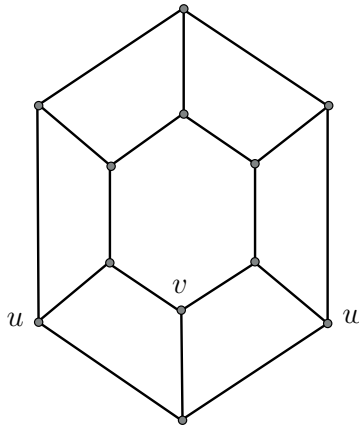


Рис. 7. Циклическая 6-лестница L_6

6.2 Дистанционно-транзитивные графы

Обобщим определение вершинно-транзитивных графов и введем понятие дистанционно-транзитивных графов.

Связный граф $\Gamma = (V, E)$ называется *дистанционно-транзитивным*, если для любых двух упорядоченных пар произвольно выбранных вершин (v, u) и (v', u') с равными расстояниями $d(v, u) = d(v', u')$ существует автоморфизм σ такой, что $\sigma(v) = v'$ и $\sigma(u) = u'$. Дистанционно-транзитивные графы имеют большую группу автоморфизмов. К ним, в частности, относятся полный граф K_n , цикл C_n , граф Петерсена, упомянутые ранее графы Хэмминга и графы Джонсона.

Если в определении дистанционно-транзитивного графа принять, что $v = u$, $v' = u'$, то следующее утверждение становится очевидным.

Факт 6.2.1 *Любой дистанционно-транзитивный граф является вершинно-транзитивным.*

Однако, обратное не всегда верно. Существуют вершинно-транзитивные графы, которые не являются дистанционно-транзитивными. Например, циклическая 6-лестница L_6 (см. рис. 7) является вершинно-транзитивным графом: его можно вращать и отражать относительно осей симметрии на плоскости, а также отражать внешний цикл длины шесть во внутренний, и наоборот. Но этот граф не является дистанционно-транзитивным, поскольку для вершин u, v и u, w имеет место $d(u, v) =$

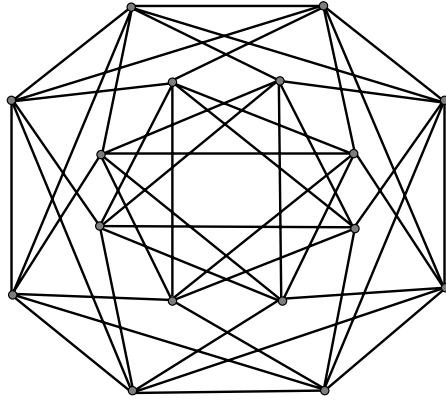


Рис. 8. Граф Шрикханде: дистанционно регулярный, но не дистанционно-транзитивный

$d(u, w) = 2$, при этом между вершинами u, v имеется два пути длины два, тогда как для вершин u, w такой путь в графе только один.

Заметим также, что граф L_6 не является реберно-транзитивным, поскольку не существует автоморфизма, переводящего ребро, соединяющее вершины внутреннего и внешнего циклов длины шесть, в ребро внутреннего цикла длины шесть, либо в ребро внешнего цикла длины шесть.

Класс вершинно- и реберно-транзитивных графов шире, чем класс дистанционно-транзитивных графов. Известны примеры связных вершинно- и реберно-транзитивных графов, не являющихся дистанционно-транзитивными, наименьшим среди которых является граф Холта, ранее нами уже рассмотренный (см. рис. 6).

Класс дистанционно регулярных графов шире, чем класс дистанционно-транзитивных графов, что следует непосредственно из определений, следовательно, верно следующее утверждение.

Факт 6.2.2 *Любой дистанционно-транзитивный граф является дистанционно регулярным.*

Однако, обратное не всегда верно. Наименьшим дистанционно регулярным, но не дистанционно-транзитивным графом является граф Шрикханде, изображенный на рис. 8. Этот граф является 6-регулярным графом диаметра два с 16 вершинами и 48 ребрами. Он также является сильно регулярным графом с параметрами $(16, 6, 2, 2)$.

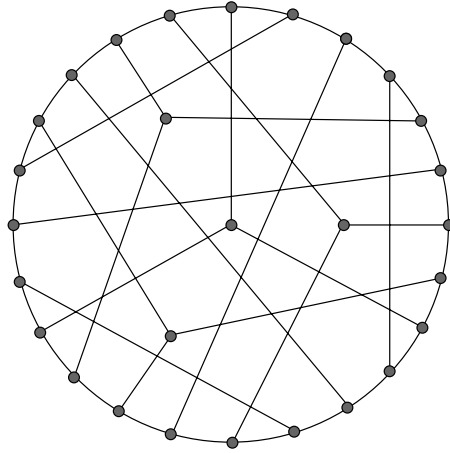


Рис. 9. Граф Коксетера

Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Факт 6.2.3 *Любой дистанционно-транзитивный граф является вершинно-транзитивным и реберно-транзитивным.*

Известно также, что дистанционно-транзитивные графы обладают богатыми группами автоморфизмов. В частности, к дистанционно-транзитивным графам относятся сильно регулярные графы, группы автоморфизмов которых были изучены Д. Хигманом при помощи теории групп ранга три [42, 43]. Именно эти группы являются группами автоморфизмов сильно регулярных графов, причем они действуют транзитивно как на множестве вершин и ребер, так и на множестве пар различных несмежных вершин.

В 1971 году Н. Биггсом и В. Смитом [15] получена классификация кубических дистанционно-транзитивных графов. Они показали, что существует только 12 конечных кубических дистанционно-транзитивных графов, а именно: полный граф K_4 , полный двудольный граф $K_{3,3}$, граф Петерсена, граф куба, граф Хивуда, граф Паппа, граф Коксетера, граф Татта-Коксетера, граф додекаэдра, граф Дезарга, граф Бигса-Смита, граф Фостера. В частности, на рис. 9 представлен граф Коксетера. Это единственный кубический дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{3, 2, 2, 1; 1, 1, 1, 2\}$ на 28 вершинах и с 42 ребрами.

Классификация дистанционно-транзитивных графов с произвольно большой степенью является открытым вопросом.

6.3 Графы Кэли

Рассмотрим конечную группу G с порождающим множеством $S \subset G$, то есть $G = \langle S \rangle$. Множество S называется *свободным от нейтрального элемента*, если $e \notin S$, и называется *симметричным*, если из $s \in S$ следует $s^{-1} \in S$, то есть для всякого порождающего элемента обратный к этому элементу также содержится в порождающем множестве. Последнее условие записывается как $S = S^{-1}$, где $S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$.

Графом Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, S) = (V, E)$ на группе G относительно порождающего множества S называется граф с множеством вершин $V = G$ и множеством ребер $E = \{\{g, h\} : g, h \in G, g^{-1}h \in S\}$.

Таким образом, в графе Кэли вершинами являются элементы группы, а ребрами являются пары, состоящие из элемента группы и его произведения справа на элемент порождающего множества. Граф Γ не содержит петель, так как S является свободным от нейтрального элемента, и является неориентированным в силу симметричности множества S .

Диаметр графа Кэли определяется как максимальная длина наименьшего выражения элемента группы через произведение порождающих группы, где максимум выбирается среди всех элементов группы:

$$\text{diam}(\text{Cay}(G, S)) = \max_{g \in \Gamma} \min_k g = s_1 \dots s_k. \quad (6.1)$$

Приведем несколько примеров графов, являющихся графами Кэли.

Пример 1. Полный граф K_n является графом Кэли на конечной аддитивной группе \mathbb{Z}_n целых чисел по модулю n относительно порождающего множества всех ненулевых элементов \mathbb{Z}_n .

Пример 2. Цикл C_n длины n является другим примером графа Кэли на конечной циклической группе \mathbb{Z}_n порядка n относительно порождающего множества двух элементов (элемент и обратный к нему элемент).

Пример 3. Цикл C_6 является примером графа Кэли на симметрической группе Sym_3 относительно порождающего множества транспозиций

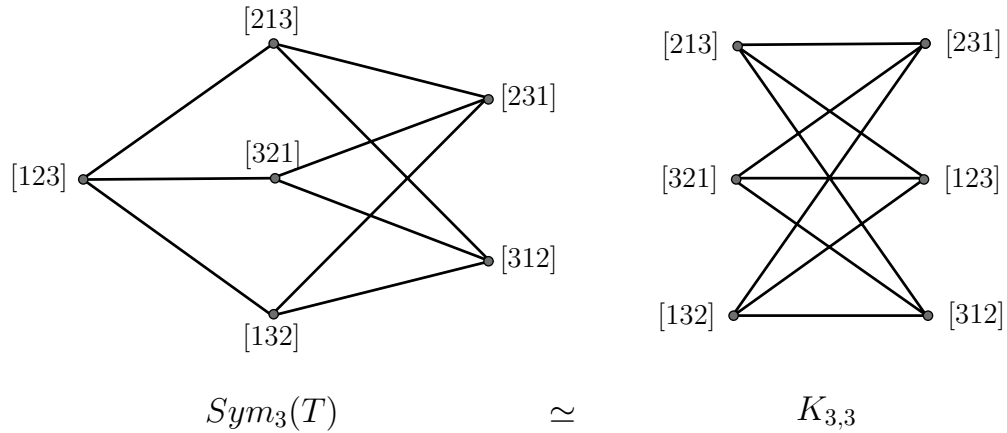


Рис. 10. Граф Кэли $\text{Sym}_3(T)$, изоморфный графу $K_{3,3}$

вида (12) и (13). Очевидно, что если в качестве порождающего множества выбрать две другие транспозиции, например, (12) и (23), то мы вновь получим цикл длины шесть. Также очевидно, что не всякий цикл можно построить как граф Кэли на симметрической группе, поскольку порядок группы задает порядок графа. Этот пример также демонстрирует, что разные порождающие множества на одной и той же группе могут давать изоморфные графы Кэли.

Пример 4. В целом, всякий циркулянт является графом Кэли, где под циркулянтом понимается граф, группа автоморфизмов которого содержит циклическую подгруппу, действующую транзитивно на вершинах графа (см. раздел 5.4). Например, граф, изображенный на рис. 5, является графом Кэли на аддитивной группе \mathbb{Z}_8 , порождающее множество которого состоит из четырех элементов. Например, в качестве порождающего множества можно взять множество $\{1, 2, 6, 7\}$.

Пример 5. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ является графом Кэли на симметрической группе Sym_3 относительно порождающего множества всех транспозиций $T = \{(12), (23), (13)\}$ на множестве $\{1, 2, 3\}$. На рис. 10 представлен граф Кэли $\text{Sym}_3(T) = \text{Cay}(\text{Sym}_n, T) \cong K_{3,3}$.

Пример 6. Химическое соединение фуллерен C_{60} (см. рис. 11) представляет собой выпуклый замкнутый многогранник на 60 вершинах, соответствующих углероду, содержит 12 пентагонов, 20 гексагонов и внешне похож на футбольный мяч. С точки зрения алгебраической теории гра-

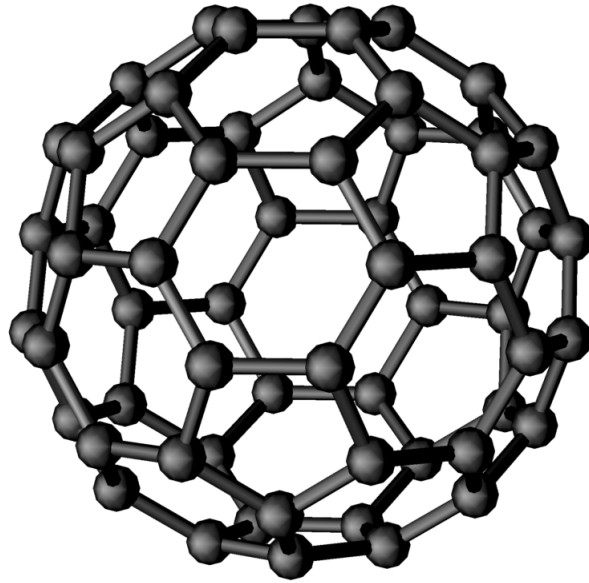


Рис. 11. Фуллерен C_{60}

фов он является графом Кэли на знакопеременной группе, порождающее множество которого состоит из трех перестановок $(12)(13)$, (12345) , (15432) , записанных в циклической форме.

Заметим, что с одной стороны, графы Кэли на одной и той же группе с разными порождающими множествами не обязательно являются изоморфными, что показывают примеры 1 и 2, а также примеры 3 и 5. С другой стороны, графы Кэли на разных группах могут оказаться изоморфными, что показывают примеры 2 и 3.

Основные свойства графов Кэли представлены в следующей теореме.

Теорема 6.3.1 Пусть S есть порождающее множество группы G . Тогда граф Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ является:

- (i) связным $|S|$ -регулярным графом;
- (ii) вершинно-транзитивным графом.

Доказательство. (i) В самом деле, поскольку S является порождающим множеством группы G , следовательно для любой вершины графа Γ существует путь, соединяющий эту вершину с нейтральным элементом

e , то есть Γ является связным графом. Поскольку S является симметричным, следовательно каждая вершина в графе $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ имеет степень, равную $|S|$, т. е. граф Γ является $|S|$ -регулярным.

(ii) Граф Кэли является вершинно-транзитивным, поскольку отображение $\alpha_g : v \mapsto gv$ является автоморфизмом для любой вершины графа Γ и выполняется следующее равенство:

$$(gu)^{-1}(gv) = u^{-1}g^{-1}gv = u^{-1}v.$$

Тогда если u и v являются смежными вершинами, то существует $s \in S$ такой, что $s = u^{-1}v$, то есть $(gu)^{-1}(gv) = s$, и следовательно вершины gu и gv также являются смежными. Если же вершины u и v не являются смежными, то тогда элемент $u^{-1}v \notin S$, а значит, $(gu)^{-1}(gv) \notin S$, то есть gu и gv также не являются смежными. Таким образом, автоморфизм $\alpha_{vu^{-1}}$ переводит u в v , что завершает доказательство теоремы. \square

Однако обратное утверждение не является верным.

Теорема 6.3.2 *Не всякий вершинно-транзитивный граф является графом Кэли.*

Доказательство. Идея доказательства принадлежит Н. Биггсу [14]. Он показал, что простейшим примером вершинно-транзитивного графа, который не является графом Кэли, служит граф Петерсена.

В самом деле, граф Петерсена является кубическим графом порядка 10 и диаметра 2 (см. рис. 1). Предположим, что граф Петерсена изоморфен некоторому графу Кэли $\text{Cay}(G, S)$. Тогда группа G должна быть группой порядка 10, а мощность порождающего множества S должна быть равна трем. Имеется ровно две неизоморфные группы порядка 10, а именно - диэдральная группа D_5 и аддитивная группа \mathbb{Z}_{10} . Если проверить все трехэлементные порождающие множества S , свободные от нейтрального элемента и симметричные, оказывается, что во всех случаях диаметр получаемого графа Кэли будет больше двух. В частности, в случае аддитивной группы \mathbb{Z}_{10} имеется ровно четыре трехэлементных порождающих множества: $\{1, 9, 5\}$, $\{2, 8, 5\}$, $\{3, 7, 5\}$, $\{4, 6, 5\}$, для каждого из которых мы не получим граф диаметра два. \square

Характеризация графов Кэли получена в 1958 году Г. Сабидусси. Введем дополнительные определения.

Действие группы G называется *свободным* на множестве элементов X , если для любых элементов $g, h \in G$ существует элемент $x \in X$ такой, что из $g \cdot x = h \cdot x$ следует $g = h$. Действие группы G называется *регулярным* на множестве элементов X , если оно транзитивно и свободно. Иными словами, действие группы G является регулярным на множестве X , если для любых элементов $a, b \in X$ существует единственный элемент $g \in G$ такой, что выполняется $g \cdot a = b$.

Теорема 6.3.3 *Граф Γ является графом Кэли тогда и только тогда, когда его группа автоморфизмов содержит подгруппу, действующую регулярно на множестве вершин графа Γ .*

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть граф $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ является графом Кэли на некоторой группе G относительно некоторого порождающего множества $S \subset G$. Тогда по Теореме 6.3.1 группа G действует на графе Γ левым умножением, которое является свободным и транзитивным. Таким образом, группа автоморфизмов графа Γ содержит подгруппу, действующую регулярно на множестве вершин графа Γ .

(\Leftarrow) Рассмотрим граф $\Gamma = (V, E)$ с группой автоморфизмов $\text{Aut}(\Gamma)$. Пусть H является подгруппой $\text{Aut}(\Gamma)$, действующей регулярно на множестве вершин графа $V(\Gamma)$. По определению регулярного действия, для фиксированного элемента $v \in V(\Gamma)$ и для некоторой вершины $u \in V(\Gamma)$ существует единственный элемент $\alpha_u \in H$ такой, что $\alpha_u(v) = u$. Тогда $H = \{\alpha_u : u \in V(\Gamma)\}$, но поскольку все α_u различны, то $|H| = |V(\Gamma)|$.

Теперь рассмотрим множество $N(v) = \{x_1, \dots, x_k\}$ всех соседей вершины v в графе Γ . Определим множество $S = \{\alpha_{x_1}, \dots, \alpha_{x_k}\}$ и рассмотрим граф Кэли $\text{Cay}(H, S)$ на группе H относительно порождающего множества S . Тогда отображение $\phi : V(\text{Cay}(H, S)) \rightarrow V(\Gamma)$, где $\phi(\alpha_u) = \alpha_u(v)$, является изоморфизмом, поскольку H действует регулярно на множестве вершин рассматриваемого графа Γ . Следовательно, $\Gamma \cong \text{Cay}(H, S)$. \square

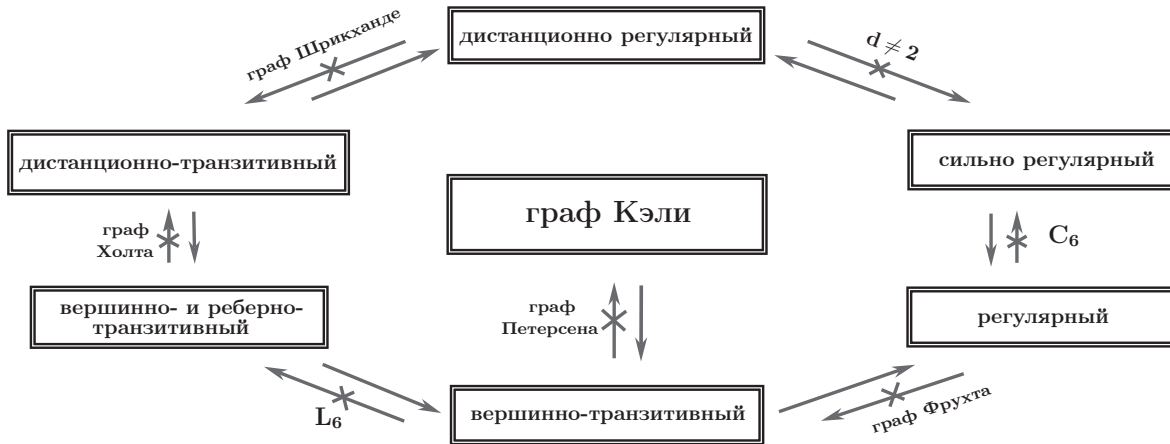


Рис. 12. Связь между различными типами регулярных и транзитивных графов

6.4 Схематическая связь между регулярными и транзитивными графами

Схематически связь между различными типами регулярных и транзитивных графов, а также их связь с графами Кэли показана на рис. 12, где прямые стрелки вида $a \rightarrow b$ указывают, что всякий граф типа a является также графом типа b . Перечеркнутые стрелки вида $a \nrightarrow b$ указывают, что существует граф типа a , который не является графом типа b . Пример такого графа обозначен над стрелкой.

6.5 Упражнения

1. Существуют ли симметричные деревья?
2. Доказать, что граф любого из пяти правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) является вершинно-транзитивным. Здесь под графом правильного многогранника понимается граф, состоящий из вершин и ребер многогранника.
3. Найти пример графа нечетной степени, являющегося вершинно-транзитивным, реберно-транзитивным и дистанционно-транзитивным.
4. Доказать, что группа автоморфизмов графа Холта, изображенного на

рис. 6, не содержит автоморфизм, переводящий ребро в себя с перестановкой вершин.

5. Доказать, что граф Коксетера является симметричным графом, но не является графом Кэли.

6. Доказать, что граф Шрикханде, изображенный на рис. 8, является симметричным графом, но не является дистанционно-транзитивным графом. Для каких пар вершин графа, находящихся на расстоянии два друг от друга, нельзя построить автоморфизм, переводящий одну пару вершин в другую пару вершин?

7. Привести два примера кубических симметричных графов, являющихся дистанционно-транзитивными, но не являющихся графами Кэли.

8. Является ли граф Кэли $\Gamma = Cay(\mathbb{Z}_{10}, \{2, 3, 7, 8\})$ циркулянтном? Является ли он дистанционно-транзитивным графом?

9. Привести примеры изоморфных графов Кэли на аддитивной группе \mathbb{Z}_8 относительно разных порождающих множеств.

10. Показать, что графы тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра являются графами Кэли на подходящих группах с подходящими порождающими множествами. Содержат ли рассмотренные графы гамильтоновы циклы?

11. Построить кубический граф Кэли на знакопеременной группе A_4 .

11. Доказать, что группа автоморфизмов графа додекаэдра D изоморфна группе $A_5 \times \mathbb{Z}_2$. Использовать этот факт для доказательства следующего утверждения: граф додекаэдра D не является графом Кэли.

13. Показать, что граф Холта является графом Кэли.

14. Построить граф Кэли на симметрической группе Sym_4 относительно порождающего множества $\{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4)\}$. Доказать, что полученный граф не является реберно-транзитивным графом, а также не является дистанционно регулярным графом и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным графом. Каков его обхват? Содержит ли граф гамильтонов цикл?

Глава 7

Семейства графов

В этой главе мы рассмотрим три важных семейства дистанционно-транзитивных графов, в одном из которых все графы являются графами Кэли, в другом семействе графы не являются графами Кэли в общем случае, а в третьем семействе дистанционно-транзитивными графами являются графы из подсемейства, при этом во всем семействе графы Кэли возникают крайне редко, только при определенных условиях на параметры.

7.1 Граф Хэмминга

Рассмотрим пространство Хэмминга F_q^n , состоящее из q^n векторов (слов) длины n над алфавитом $\{0, 1, \dots, q - 1\}$, $q \geq 2$. В этом пространстве определена метрика Хэмминга $d(x, y)$, равная числу позиций, в которых векторы x и y различны.

Граф Хэмминга $H_n(q)$ определяется как граф с множеством вершин, соответствующих элементам пространства Хэмминга, при этом ребро $\{x, y\}$ имеется в графе тогда и только тогда, когда $d(x, y) = 1$. Граф Хэмминга можно также определить как декартово произведение n полных графов K_q , причем $H_1(q) \cong K_q$, а $H_n(1) \cong K_1$.

Граф Хэмминга $H_n(q)$ обладает следующими свойствами.

1. Из определения графа Хэмминга следует, что он является регулярным графом степени $n(q - 1)$ и диаметра n . В самом деле, наиболее удаленными друг от друга вершинами в графе являются те, которым

соответствуют векторы с различными n позициями, что дает диаметр n . Регулярность $n(q - 1)$ вытекает из тех же соображений: в каждой из n позиций два вектора могут различаться $q - 1$ элементом алфавита.

2. Граф Хэмминга является вершинно-транзитивным. В самом деле, пусть v некоторая фиксированная вершина графа. Тогда для любой другой вершины x графа рассмотрим отображение $\varphi_v : x \rightarrow x + v$, где $x + v$ суммируется по модулю q . Тогда, если вершины x и y смежны в графе, то и вершины $x + v$ и $y + v$ также будут являться смежными в графе, поскольку $d(x + v, y + v) = 1$. Следовательно, всякое отображение $\varphi_{y-x} : x \rightarrow y$ является автоморфизмом графа Хэмминга, а сам граф является вершинно-транзитивным.

3. Структурное строение графа Хэмминга как декартово произведение n полных графов K_q позволяет также показать, что граф является дистанционно-транзитивным (см. [17, глава 7]).

4. Дистанционная регулярность графа Хэмминга $H_n(q)$ вытекает из того факта, что $H_n(q)$ можно определить как декартово произведение n полных графов K_q (см. [17, стр. 26]). Прямыми вычислениями показывается, что граф Хэмминга является дистанционно регулярным с массивом пересечений $c_i = i$ и $b_i = (n - i)(q - 1)$ для $0 \leq i \leq n$.

Рассмотрим слоевое разбиение $S_i(x)$, $0 \leq i \leq n$, графа относительно вершины $x = (0, 0, \dots, 0)$ и пусть $y \in S_i(x)$. Очевидно, что $d(x, y) = i$, откуда следует, что $c_i = i$. Параметр a_i равен i возможностям выбрать позицию вектора $z \in S_i(x)$, где $d(z, y) = 1$, в которой z и y различаются. Поскольку всего $q - 2$ элементов алфавита для выбора, то $a_i = i(q - 2)$. Параметр b_i равен числу вершин $z \in S_{i+1}(x)$, являющихся соседями вершины y . Поскольку z различается с x и y в $n - i$ позициях, а для выбора имеется $q - 1$ элементов алфавита, то $b_i = (n - i)(q - 1)$.

5. Спектр графа является целочисленным с собственными значениями $\lambda_i = q(n - i) - n$ и их кратностями $\text{mul}(\lambda_i) = \binom{n}{i}(q - 1)^i$, где $0 \leq i \leq n$ (см. [18, стр. 174]). Он получается напрямую с учетом структурного строения графа Хэмминга.

6. Граф Хэмминга является графом Кэли на аддитивной группе F_q^n с порождающим множеством $S = \{xe_i : x \in (F_q)^\times, 1 \leq i \leq n\}$, где

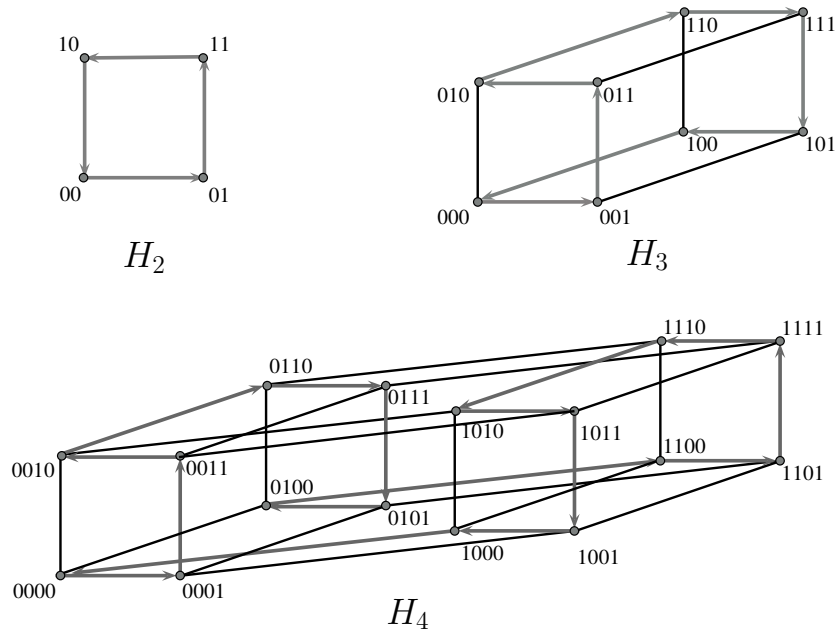


Рис. 13. Гиперкубы H_2, H_3, H_4

$(F_q)^\times$ является декартовым произведением поля F_q из q элементов (q есть степень простого числа), а $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $1 \leq i \leq n$, является стандартным базисом векторов F_2^n .

Рассмотрим два частных случая графа Хэмминга.

Если $q = 2$, то граф Хэмминга $H_n(2)$ известен как *гиперкуб*, стандартным обозначением которого является H_n . Поскольку гиперкуб можно определить как декартово произведение n графов K_2 , то $H_1 \cong K_2$, $H_2 \cong K_2 \times K_2 \cong C_4$, $H_3 \cong H_2 \times K_2$, а в общем случае, $H_n \cong H_{n-1} \times K_2$. Гиперкуб H_{n+1} можно также построить как объединение двух гиперкубов H_n путем добавления ребер от каждой вершины одной копии H_n до соответствующей вершины другой копии. Примеры гиперкубов малых размерностей можно видеть на рис. 13.

Гиперкуб H_n можно также построить из семейства подмножеств множества с n элементами так, что вершинами в графе являются все подмножества, а ребро возникает, когда соответствующие подмножества отличаются только одним элементом.

Гиперкуб H_n является симметричным графом, группа автоморфизмов которого содержит $2^n n!$ автоморфизмов. Он также является дистан-

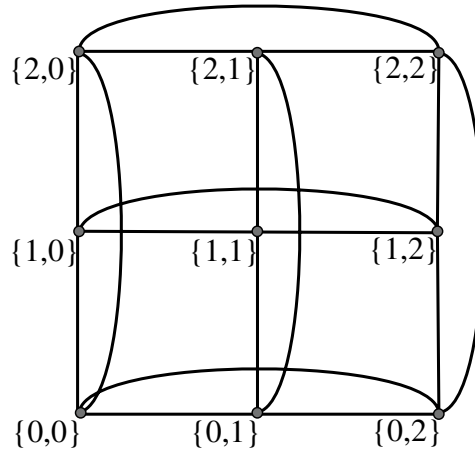


Рис. 14. Решеточный граф $H_2(3)$

ционно регулярным с массивом пересечений $c_i = i$ и $b_i = (n - i)$, где $0 \leq i \leq n$. Спектр гиперкуба представлен собственными значениями $\lambda_i = n - 2i$ кратности $\text{mul}(\lambda_i) = \binom{n}{i}$, где $0 \leq i \leq n$.

Если $n = 2$, то граф Хэмминга $H_2(q)$ известен как *решеточный граф*. Его можно также рассматривать как реберный граф полного двудольного графа $K_{q,q}$. В этом случае решеточный граф имеет по вершине для каждого из q^2 ребер графа $K_{q,q}$ и две вершины решеточного графа являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие ребра полного двудольного графа имеют общую вершину.

Решеточный граф $H_2(3)$ представлен на рис. 14.

Заметим, что любые две вершины решеточного графа находятся на расстоянии либо один, либо два, в зависимости от того, являются ли они смежными или нет. При этом, любые две смежные вершины графа можно перевести в любые две другие смежные вершины с помощью симметрии графа. Аналогично, для несмежных вершин. Таким образом, решеточный граф является дистанционно-транзитивным. Поскольку его диаметр равен двум, следовательно, он является сильно регулярным графом. Его параметры $|V(H_2(q))| = q^2$, $k = 2(q - 1)$, $\lambda = q - 2$, $\mu = 2$.

Решеточный граф является симметричным графом, группа автоморфизмов которого содержит в качестве подгруппы циклическую группу, действующую путем перестановки вершин циклически. Таким образом,

решеточный граф является циркулянтном.

В целом, граф Хэмминга находит широкое применение в теории кодирования, криптографии, информатике, а также биоинформатике, поскольку во всех этих дисциплинах используется метрика Хэмминга.

7.2 Граф Джонсона

В этом разделе мы рассмотрим семейство графов Джонсона, среди которых только в частных случаях возникают графы Кэли.

Графом Джонсона $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m -подмножества некоторого заданного n -множества, и две вершины графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им m -подмножества пересекаются по $(m - 1)$ -подмножествам.

Граф Джонсона является примером кодового графа и широко используется в теории кодирования наряду с графом Хэмминга. В этом случае граф Джонсона принято определять как граф на множестве вершин, представленных двоичными векторами длины n и веса m , где под весом понимается количество ненулевых позиций двоичного вектора. Две вершины в графе Джонсона смежны, если соответствующие им векторы различаются ровно в двух позициях.

Число ребер в кратчайшем пути, связывающем пару вершин графа Джонсона, называется *расстоянием Джонсона*. Очевидно, что расстояние Джонсона равно половине (четного) расстояния Хэмминга. В терминах m -подмножеств, расстояние Джонсона определяется как половина от размера симметрической разницы двух m -подмножеств.

Ниже перечислены основные свойства графа Джонсона:

- граф $J(n, m)$ изоморфен графу $J(n, n - m)$;
- является регулярным графом степени $m(n - m)$ и диаметра $d = \min\{m, n - m\}$;
- является дистанционно-транзитивным;
- является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $c_i = i^2$ и $b_i = (m - i)(n - m - i)$ для $0 \leq i \leq d$;
- не является графом Кэли, в общем случае.

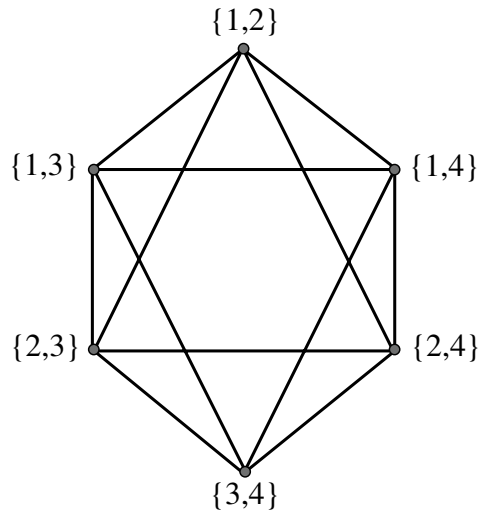


Рис. 15. Треугольный граф $T(4)$

Рассмотрим частные случаи графа Джонсона.

1. При $m = 1$ граф Джонсона изоморфен полному графу на n вершинах, т. е. $J(n, 1) \cong K_n$, а значит он является графом Кэли в этом случае, в частности, циркулянтном (см. пример 1, раздел 6.3 и раздел 5.4).

2. При $m = 2$ и $n \geq 4$ граф Джонсона называется *треугольным графом* $T(n)$. Его вершинами являются двухэлементные подмножества n -множества, и две вершины являются смежными, если они пересекаются по одному элементу.

Поскольку диаметр графа Джонсона вычисляется как минимальное значение из m и $n - m$, то диаметр треугольного графа равен двум. Следовательно, треугольный граф $T(n)$ является сильно регулярным графом. Его параметрами являются $|V(T(n))| = \frac{n(n-1)}{2}$, $k = 2(n - 2)$, $\lambda = n - 2$, $\mu = 4$, поскольку из определения сильно регулярного графа мы знаем, что $\lambda = a_1$ и $\mu = c_2$ (см. раздел 4.2).

На рис. 15 представлен треугольный граф $T(4)$. Он является графом Кэли на конечной циклической группе \mathbb{Z}_6 порядка 6, порождающее множество которого состоит из четырех элементов $\{1, 2, 4, 5\}$. Таким образом, граф $T(4)$ является еще одним примером циркулянтного графа.

Однако, в общем случае, граф Джонсона не является графом Кэли. Докажем следующее утверждение.

Теорема 7.2.1 *Граф Джонсона $J(5, 3)$ не является графом Кэли.*

Доказательство. Из свойств графа Джонсона следует, что граф $J(5, 3)$ является 6-регулярным и дистанционно регулярным графом диаметра 2 (то есть сильно регулярным графом), причем $b_1 = (3 - 1)(5 - 3 - 1) = 2$. Воспользуемся этим последним свойством графа Джонсона $J(5, 3)$, чтобы показать, что он не является графом Кэли, то есть, что не удастся найти подходящую группу и подходящее порождающее множество, при которых искомым граф Кэли был бы изоморфен графу $J(5, 3)$. Доказательство проведем от противного.

Предположим, что $J(5, 3) \cong \text{Cay}(G, S)$ для некоторой группы G и некоторого порождающего множества S . Тогда порядок графа должен совпадать с порядком группы $|G| = |V(J(5, 3))| = 10$, а $|S| = 6$. Из теории групп известно, что существует только две неизоморфные группы порядка 10, а именно, циклическая аддитивная группа \mathbb{Z}_{10} и диэдральная группа D_{10} .

Рассмотрим случай $G = \mathbb{Z}_{10}$. Тогда группа содержит один элемент порядка два, четыре элемента порядка десять и четыре элемента порядка пять. Поскольку по определению графа Кэли порождающее множество должно удовлетворять двум условиям, а именно: быть свободным от нейтрального элемента и симметричным, - то порождающее множество S с шестью элементами может содержать:

- 1) либо четыре элемента порядка десять и два элемента порядка пять;
- 2) либо два элемента порядка десять и четыре элемента порядка пять.

В первом случае без ограничения общности можно считать, что $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Рассмотрим слоевое представление $\text{Cay}(G, S)$ относительно вершины 0: первый слой S_1 совпадает с порождающим множеством S , а второй слой содержит три элемента $S_2 = \{\pm 4, 5\}$. Единственной вершиной из S_2 , смежной с вершиной 1 из S_1 , будет вершина 4. То есть $b_1 = 1$ в этом случае, в то время как $b_1 = 2$ в графе $J(5, 3)$. Получили противоречие. Следовательно, рассмотренное порождающее множество не дает граф Кэли, изоморфный графу Джонсона.

Во втором случае без ограничения общности можно считать, что $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Снова получаем противоречие, так как для вершины 3 из

S_2 найдется единственная вершина из S_1 , т. е. $b_1 = 1$.

Аналогичным образом проверяется, что для диэдральной группы и для любых ее порождающих множеств не будет выполняться условие на параметры массива пересечений графа Джонсона, что в конечном итоге дает нам нужный результат. \square

Из свойств графа Джонсона следует, что $J(5, 3) \cong J(5, 2)$, а следовательно мы имеем следующее утверждение.

Следствие 7.2.1 *Граф Джонсона $J(5, 2)$ не является графом Кэли.*

Для других частных случаев графа Джонсона аналогичным образом показывается, что он не является графом Кэли, однако общего доказательства не существует.

Известен также следующий факт.

Факт 7.2.1 *Для любого n , граф Джонсона $J(n, 2)$ является дополнением графа Кнезера $K(n, 2)$.*

Рассмотрению свойств графа Кнезера посвящен следующий раздел.

7.3 Граф Кнезера

Граф Кнезера $K(n, k)$, $k \geq 1$, $n \geq 2k + 1$, определяется как граф, в котором вершины соответствуют k -элементным подмножествам множества $\{1, \dots, n\}$. Вершины в графе соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества не пересекаются.

Заметим, что условие на параметры $n \geq 2k + 1$ позволяет рассматривать только связные графы Кнезера. При $n < 2k$ граф Кнезера является пустым, а при $n = 2k$ граф Кнезера представляет собой набор попарно несмежных рёбер, т. е. является паросочетанием.

Граф Кнезера $K(n, k)$ обладает следующими свойствами:

- является регулярным степени $\binom{n-k}{k}$ и диаметра $\lceil \frac{k-1}{n-2k} \rceil + 1$ (см. [81]);
- не является сильно регулярным, поскольку различные пары несмежных вершин могут иметь различное количество общих соседей, что определяется размером пересечений соответствующих пар множеств;

– является целочисленным, поскольку его спектр содержит $k + 1$ различных собственных значений вида $\lambda_i = (-1)^i \binom{n-k-i}{k-i}$ с кратностями $\text{mul}(\lambda_i) = \binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}$, где $0 \leq i \leq k$, при этом собственное значение λ_0 имеет кратность 1;

– является симметричным, группа автоморфизмов которого изоморфна симметрической группе степени n , т. е. $\text{Aut}(K(n, k)) \cong \text{Sym}_n$;

– является дистанционно-транзитивным, когда совпадает с *нечетным* графом $O_n = K(2n - 1, n - 1)$ (см. [17, с. 260]).

Класс нечетных графов представляет самостоятельный интерес. В частности, нечётные графы являются дистанционно-транзитивными и дистанционно регулярными графами, которые однозначно определяются своим массивом пересечений. С другой стороны, нечетные графы никогда не являются графами Кэли при $n > 2$.

Это следует из характеристики графов Кнезера, являющихся графами Кэли, полученной К. Годсилом в 1980 г. [34].

Утверждение 7.3.1 *Граф Кнезера $K(n, k)$, $k \geq 2$, не является графом Кэли, за исключением следующих случаев:*

- (i) $k = 2$, n является степенью простого числа и $n \equiv 3 \pmod{4}$;
- (ii) $k = 3$, $n = 8$ или $n = 32$.

Рассмотрим другие частные случаи графа Кнезера.

1. При $k = 1$ граф Кнезера является полным графом, а значит, является графом Кэли, в частности, циркулянтным графом (см. пример 1, раздел 6.3, и раздел 5.4).

2. При $k = 2$ граф Кнезера $K(n, 2)$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{(n-2)(n-3)/2, 2n-8; 1, (n-3)(n-4)/2\}$. По Факту 7.2.1 он изоморфен дополнению графа Джонсона $J(n, 2)$. В частности, на рис. 16 представлен граф Кнезера $K(5, 2)$, изоморфный дополнению графа Джонсона $J(5, 2)$, а также изоморфный графу Петерсена, который по Теореме 6.3.2 не является графом Кэли. Заметим, что из общих свойств графа Кнезера следует, что группа автоморфизмов графа Петерсена изоморфна симметрической группе степени пять.

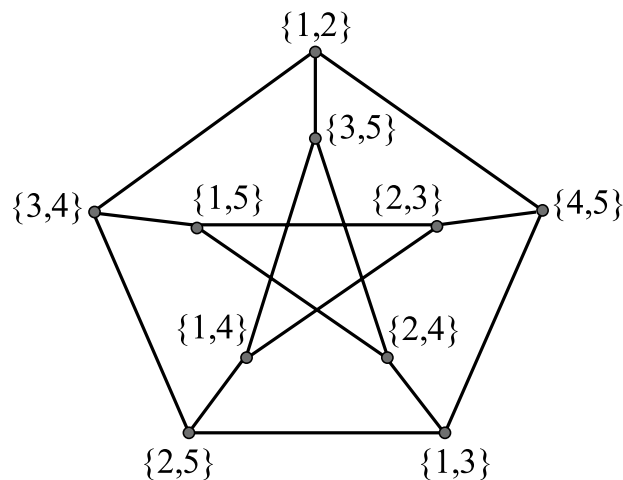


Рис. 16. Граф Кнезера $K(5, 2)$, изоморфный графу Петерсена

7.4 Упражнения

1. Определить спектр графа гиперкуба H_n , $n \geq 2$.
2. Показать, что граф гиперкуба является графом Кэли. Найти группу, на которой он задается, и определить порождающее множество.
3. Построить граф гиперкуба H_4 , найти его группу автоморфизмов.
4. Построить решеточный граф $H_2(4)$. Определить его диаметр, найти массив пересечений, спектр.
5. Показать, что расстояние в графе Джонсона равно половине расстояния Хэмминга между соответствующими m -подмножествами.
6. Построить треугольный граф $T(5)$. Определить его диаметр, найти массив пересечений, спектр.
7. Показать, что граф Кнезера $K(8, 3)$ является графом Кэли.
8. Убедиться, что граф Кнезера $K(5, 2)$ изоморфен дополнению графа Джонсона $J(5, 2)$.
9. Проверить является ли граф Петерсена нечётным графом.

Глава 8

Графы Кэли на симметрической группе

В этой главе мы поговорим о графах Кэли на симметрической группе относительно различных порождающих множеств, а именно - рассмотрим важные семейства графов Кэли, возникающие при решении прикладных задач в информатике, молекулярной биологии и биоинформатике. При этом, ни один из рассматриваемых графов не является ни дистанционно регулярным, ни дистанционно-транзитивным.

8.1 Транспозиционный граф

Транспозиционный граф $T_n = Cay(\text{Sym}_n, T)$, $n \geq 2$, на группе Sym_n определяется относительно порождающего множества T всех транспозиций, т. е. $T = \{(ij) \in \text{Sym}_n, 1 \leq i < j \leq n\}$. Он является связным $\binom{n}{2}$ -регулярным графом. Расстояние между вершинами в графе равно наименьшему числу транспозиций, переводящих одну перестановку в другую. Поскольку любой n -цикл может быть представлен как произведение $n - 1$ транспозиций и не менее, следовательно, диаметр графа равен $n - 1$. Поскольку при умножении перестановки на транспозицию четность полученной перестановки всегда меняется, следовательно, граф T_n является двудольным. Как всякий граф Кэли он является вершинно-транзитивным, а кроме этого, он также является реберно-транзитивным.

Однако, граф T_n не является дистанционно регулярным и, следова-

тельно, не является дистанционно-транзитивным при $n > 3$. Например, граф $T_3 = Cay(\text{Sym}_3, T)$ на рис. 10 является дистанционно регулярным, а граф $T_4 = Cay(\text{Sym}_4, T)$ уже не является дистанционно регулярным. Это легко показывается, если рассмотреть все вершины v такие, что $d(I_n, v) = 2$ в T_4 . Тогда массив пересечений будет иметь вид $\{6, 5, 3; 1, 3, 6\}$ для восьми из таких вершин и вид $\{6, 5, 4; 1, 2, 6\}$ для оставшихся трех.

Граф T_n находит применение в теории компьютерных сетей, в частности, при решении оптимизационных задач на сетях [50], а также в теории кодирования, в частности, для него решена задача эффективного восстановления вершин [62].

8.2 Bubble-sort граф

Bubble-sort граф $BS_n = Cay(\text{Sym}_n, t)$, $n \geq 2$, на группе Sym_n определяется относительно множества $t = \{(i\ i+1) \in \text{Sym}_n, 1 \leq i < n\}$, элементами которого являются транспозиции двух соседних позиций в перестановке. Это множество также хорошо известно как $(n-1)$ -множество Коксетера, порождающее симметрическую группу Sym_n [16]. Граф BS_n является связным двудольным $(n-1)$ -регулярным. Диаметр $\binom{n}{2}$ достигается на вершинах, соответствующих перестановке $[n\ n-1 \dots 2\ 1]$ и тождественной перестановке. Поскольку граф является двудольным, он не содержит нечетные циклы, но содержит все четные циклы длины $2l$, где $2 \leq l \leq \frac{n!}{2}$ [53].

Граф BS_n не является реберно-транзитивным при $n > 3$. В самом деле, на рис. 17 представлен граф BS_4 , у которого есть ребра, принадлежащие циклам длины шесть (например, ребро между вершинами $[3124]$ и $[3214]$), а также ребра, принадлежащие циклам длины четыре и шесть (например, ребро между вершинами $[3124]$ и $[1324]$). Очевидно, в графе не существует автоморфизма, переводящего эти ребра друг в друга. Он также не является дистанционно регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при $n > 3$).

В геометрии этот граф называется 1-скелетоном перестановочного

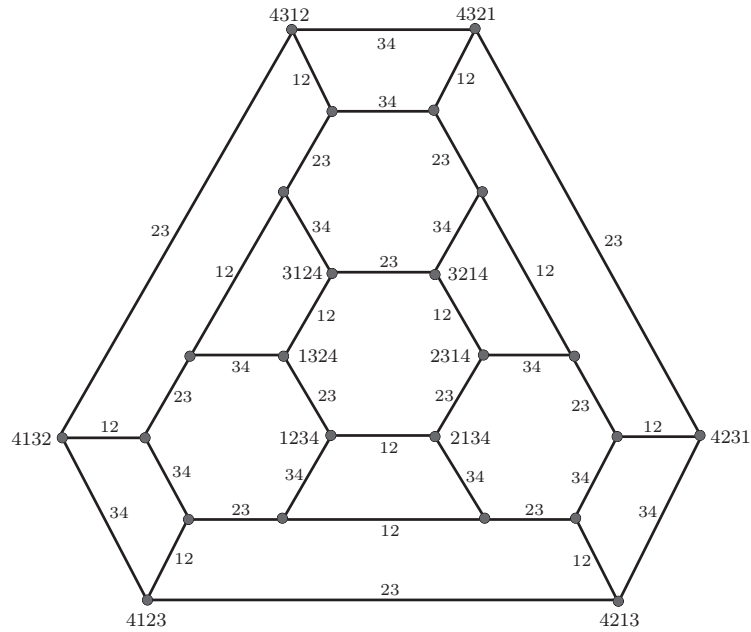


Рис. 17. Bubble-sort граф BS_4

многогранника, который определяется как выпуклая оболочка всех $n!$ точек, получающихся перестановками координат вектора $(1, 2, \dots, n)$. Перестановочный многогранник порядка четыре представлен на рис. 18.

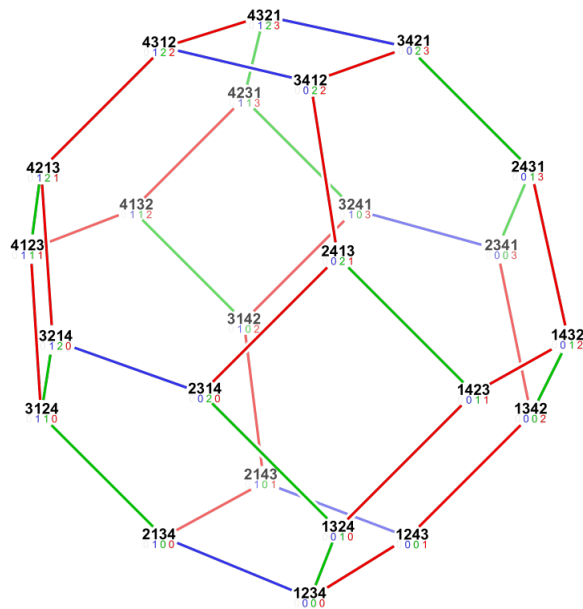


Рис. 18. Перестановочный многогранник при $n = 4$

8.3 Star граф

Star граф $S_n = \text{Cay}(\text{Sym}_n, S)$, $n \geq 2$, на группе Sym_n определяется относительно множества $S = \{(1i) \in \text{Sym}_n, 1 < i \leq n\}$. Граф S_n является связным двудольным $(n - 1)$ -регулярным. Расстояние в графе равно наименьшему числу транспозиций из множества S , переводящих одну перестановку в другую. Поскольку граф S_n является двудольным, он не содержит циклы нечетной длины, но содержит все четные циклы C_{2l} , где $3 \leq l \leq \frac{n!}{2}$ [48]. Star граф является реберно-транзитивным, но не является дистанционно регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при $n > 3$).

Диаметр Star графа вычисляется следующим образом [1].

Утверждение 8.3.1

$$\text{diam}(S_n) = \begin{cases} \frac{3(n-1)}{2}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 1 + \frac{3(n-2)}{2}, & \text{если } n > 3 \text{ четное.} \end{cases}$$

Доказательство. Диаметр графа Кэли на симметрической группе степени n обычно оценивают для вершины, соответствующей тождественной перестановке $I_n = [1, 2, \dots, n]$, и ищут по отношению к ней наиболее удаленную. Для нахождения диаметра в графе Кэли этого достаточно, т. к. всякий граф Кэли является вершинно-транзитивным.

Рассмотрим «жадный» алгоритм, основная цель которого состоит в том, чтобы поставить первый элемент перестановки на его место в тождественной перестановке I_n . Тогда, если первый элемент принадлежит некоторому нетривиальному циклу в перестановке, то эту процедуру следует повторять до тех пор, пока на первом месте не окажется единица. Если все элементы уже стоят на своем месте, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае, необходимо транспонировать первый элемент перестановки с любым другим элементом, который все еще находится не на своем месте, и продолжить алгоритм, пока не получится тождественная перестановка. В целом, необходимо сделать $n - 1$ «сортировочных» шагов. При этом, расстояние $d(\pi, I_n)$ между любой перестановкой π , имеющей $s(\pi)$ нетривиальных циклов и $f(\pi)$ фиксирован-

ных точек, и тождественной перестановкой I удовлетворяет следующему неравенству:

$$d(\pi, I) \leq n - 1 + c(\pi) - f(\pi) - \begin{cases} 1, & \text{если } \pi_1 \neq 1, \\ 0, & \text{если } \pi_1 = 1. \end{cases} \quad (8.1)$$

Так, если $\pi = [64725831]$, то формула (8.1) даёт $d(\pi, I) \leq 8$, поскольку $c(\pi) = 3$, $f(\pi) = 1$ и $\pi_1 \neq 1$. Цепочка из 8 преобразований π в тождественную перестановку I_8 в соответствии с алгоритмом может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi = [64725831] &\rightarrow [84725631] \rightarrow [14725638] \rightarrow [41725638] \rightarrow \\ &\rightarrow [21745638] \rightarrow [12745638] \rightarrow [72145638] \rightarrow [32145678] \rightarrow \\ &\rightarrow [12345678] = I_8 \end{aligned}$$

Таким образом, в худшем случае, когда число нетривиальных циклов в перестановке равно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, а число фиксированных точек, соответственно, равно нулю, из (8.1) для четного n имеем

$$\text{diam}(S_n) = \max_{\pi \in \text{Sym}_n} d(\pi, I) \leq n - 1 + \frac{n}{2} - 1 = 1 + \frac{3(n-2)}{2},$$

а для нечетного n и при $\pi_1 = 1$ получаем

$$\text{diam}(S_n) = \max_{\pi \in \text{Sym}_n} d(\pi, I) \leq n - 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{3(n-1)}{2}.$$

Теперь рассмотрим перестановки, для которых требуется в точности $\frac{3(n-1)}{2}$ и $(1 + \frac{3(n-2)}{2})$ шагов, что даст формулу для диаметра графа.

Пусть n является нечётным. Рассмотрим $\tau = [13254 \dots n n - 1]$. Понятно, что при применении любой транспозиции из множества st к некоторой перестановке только один элемент этой перестановки меняет место (не считая первого). Нетрудно показать, что для того, чтобы в перестановке τ поставить элементы 3 и 2 на их «правильные» места, потребуется, по крайней мере, три транспозиции для второго и третьего элементов. Поскольку всего в τ подобных пар $\frac{(n-1)}{2}$, то требуется ровно $\frac{3(n-1)}{2}$ шагов, чтобы получить тождественную перестановку, следовательно, диаметр графа в этом случае равен $\frac{3(n-1)}{2}$.

Пусть n является чётным. В этом случае рассмотрим перестановку $\omega = [214365 \dots n n - 1]$. Очевидно, что за один шаг можно поставить на свои места элементы 2 и 1, но для оставшихся $n-2$ элементов потребуется не менее трёх операций для каждой пары элементов, т. е. общее число шагов равно $1 + \frac{3(n-2)}{2}$, что даёт диаметр графа в этом случае. \square

Граф S_n является одним из наиболее изученных в теории межкоммуникационных сетей, поскольку многие параллельные алгоритмы эффективно реализуются на этом графе [41, 59].

8.4 Реверсальный граф

Реверсальный граф $R_n = \text{Cay}(\text{Sym}_n, R)$, $n \geq 2$, на симметрической группе степени n определяется относительно порождающего множества $R = \{r_{ij} \in \text{Sym}_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ всех реверсалов r_{ij} , где под реверсалом понимается перестановка, умножение на которую меняет местами элементы i и j , $i+1$ и $j-1$, $i+2$ и $j-2$, и т. д. внутри интервала $[i, j]$, $1 \leq i < j \leq n$, некоторой заданной перестановки π , т. е. если задана перестановка $\pi = [\pi_1 \dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} \pi_j \dots \pi_n]$, то имеем:

$$\pi r_{ij} = [\pi_1 \dots \pi_{i-1} \pi_j \pi_{j-1} \dots \pi_{i+1} \pi_i \pi_{j+1} \dots \pi_n].$$

Граф R_n является связным $\binom{n}{2}$ -регулярным. Расстояние в графе определяется как наименьшее число реверсалов, переводящих одну перестановку в другую. Диаметр реверсального графа равен $(n-1)$. Сначала этот факт был подтвержден экспериментальными результатами, полученными Дж. Кечечиоглу и Д. Санькофф для $n \leq 200$ в 1995 г. [52], а в 1996 г. доказан В. Ванфа и П. Певзнер [12]. При этом, единственными перестановками, на которых диаметр достигается, является перестановка Голлана γ^n и обратная к ней, где γ^n задается рекурсией:

$$\gamma^{n+1} = \begin{cases} [1], & n = 0; \\ [\gamma_1^n \gamma_2^n \dots \gamma_{n-1}^n n + 1 \gamma_n^n], & n - \text{четное}; \\ [\gamma_1^n \gamma_2^n \dots \gamma_{n-2}^n n + 1 \gamma_{n-1}^n \gamma_n^n], & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Реверсальный граф не является реберно-транзитивным, а также не является дистанционно регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при $n > 3$).

Реверсальный граф используется при решении задачи эффективного восстановления вершин в графе, которая возникает в теории кодирования [54], а также при решении задачи сортировка реверсалами, которая возникает в молекулярной биологии следующим образом. Всякий геном представим в виде перестановки, элементы которых соответствуют генам, а операции на перестановках соответствуют эволюционным событиям—мутациям. Одной из таких операций является реверсал. Задача поиска наименьшего числа реверсалов, переводящих заданную перестановку в тождественную называется сортировка реверсалами. Более полную информацию можно найти в книге П. Певзнера «Вычислительная молекулярная биология: алгоритмический подход» [70], а также в главе «Преобразования генома», представленной Д. Санькофф и Н. Эль-Мабрук в книге «Актуальные темы в вычислительной молекулярной биологии» [74].

8.5 Пансаке граф

Пансаке граф $P_n = Cay(\text{Sym}_n, PR)$, $n \geq 2$, на группе Sym_n определяется относительно порождающего множества PR всех префикс-реверсалов, так что $PR = \{r_i \in \text{Sym}_n, 1 < i \leq n\}$, где $r_i \equiv r_{1i}$ меняет порядок элементов внутри интервала $[1, i]$, $2 \leq i \leq n$, в перестановке π при умножении на нее справа: $[\pi_1 \dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_n] r_i = [\pi_i \dots \pi_1 \pi_{i+1} \dots \pi_n]$. Под расстоянием в графе понимается наименьшее число префикс-реверсалов, переводящих одну перестановку в другую. Граф P_n является связным $(n - 1)$ -регулярным. Он не содержит циклы C_3, C_4, C_5 , но при этом содержит все остальные циклы длины l , $6 \leq l \leq n!$ [51, 76]. Граф P_n не является реберно-транзитивным, не является дистанционно регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при $n > 3$).

Граф P_n известен в связи с открытой Пансаке problem [28], состоящей в нахождении его диаметра. Эта проблема рассматривается в следующей

главе, посвященной задаче определения диаметра в графах Кэли.

8.6 Упражнения

1. Доказать, что транспозиционный граф T_n не содержит циклы длины три для любого $n \geq 3$.
2. Показать, что Bubble-sort граф BS_n и Star граф S_n изоморфны только при $n = 2$ и $n = 3$.
3. Bubble-sort граф BS_4 обладает следующим свойством: каждая его вершина принадлежит ровно одному циклу длины четыре. Верно ли это высказывание для Bubble-sort графа BS_5 ?
4. Построить Star граф S_4 и показать, что для любой пары ребер найдется подходящий автоморфизм, переводящий одно ребро в другое.
5. Найти спектр Star графа S_4 . Убедиться, что спектр содержит только целые значения. Является ли ноль собственным значением графа S_4 ?
6. Найти расстояние между вершинами $[3124]$ и $[4321]$ в графе Bubble-sort графе BS_4 . Какая последовательность транспозиций задает путь от одной вершины к другой вершине?
7. Найти расстояние между вершинами $[3124]$ и $[4321]$ в графе Star графе S_4 . Какая последовательность транспозиций задает путь от одной вершины к другой вершине в этом графе?
8. Доказать, что Рамсаке граф P_n не содержит циклы C_3, C_4, C_5 для любого $n \geq 3$. Какие префикс-реверсалы задают цикл длины шесть?
9. Сколько индуцированных подграфов P_{n-1} содержится в Рамсаке графе P_n для любого $n \geq 3$?
10. Построить Рамсаке графе P_4 , найти его диаметр, определить все диаметральные вершины для тождественной перестановки I_n .

Глава 9

Нахождение диаметра графа Кэли

В этой главе изучается задача определения диаметра графов Кэли, приводятся общие оценки на диаметр графов Кэли на абелевых и неабелевых группах.

9.1 NP-трудность и кубик Рубика

Одним из привлекательных свойств графов Кэли является их относительно малый диаметр, где под диаметром графа Кэли $\Gamma = Cay(G, S)$ понимается максимум среди всех кратчайших длин выражения любого элемента g группы G через произведение генераторов из S . Нахождение диаметра графа Кэли на произвольной группе относительно произвольного порождающего множества является NP-трудной задачей, поскольку известно, что задача поиска минимального слова, в целом, является NP-трудной [29].

Нахождение диаметра графа Кэли с заданными группой и порождающим множеством тоже является непростой задачей. В частности, эта задача возникает при решении головоломки $3 \times 3 \times 3$ кубика Рубика. У кубика всего шесть граней, при вращении которых возникает $N = 43.252.003.274.489.856.000$ позиций. Если рассмотреть эти позиции как группу перестановок головоломки, а порождающее множество этой группы определить 18 типами вращений граней, то мы получим 18-регулярный граф Кэли на N вершинах. Решением головоломки является поиск пути в таком графе от вершины, соответствующей исходной пози-

ции кубика, к вершине, соответствующей «собранный» позиции, т. е. к нейтральному элементу группы. Число ходов в наилучшем решении при наихудшей исходной позиции будет соответствовать диаметру данного графа Кэли. Решением этой задачи занимались, начиная с 1981 г., когда были найдены первые оценки на диаметр. Однако, только в 2010 г. было анонсировано [37], что диаметр графа равен 20.

В общем случае достаточно сложно получить даже нижние и верхние оценки на диаметр графа Кэли. Кроме этого, существует большая разница между графами Кэли на абелевых и неабелевых группах.

9.2 Диаметр графа Кэли на абелевой группе

В 1993 г. Ф. Аннексштейн и М. Баумслаг [4] получили нижнюю оценку на диаметр ориентированного графа Кэли (порождающее множество которого не является симметричным) на абелевой группе. Напомним, что в абелевой группе умножение справа и слева эквивалентны, т. е. для любых $g, h \in G$ выполняется равенство $gh = hg$. Оценка Аннексштейна-Баумслага применима также для неориентированных графов Кэли, поэтому ниже мы приводим доказательство этого результата.

Теорема 9.2.1 Пусть G является абелевой группой с порождающим множеством $S \neq S^{-1}$, $|S| = r$. Тогда диаметр d графа Кэли на группе G относительно множества S удовлетворяет неравенству:

$$\text{diam}(\text{Cay}(G, S)) \geq \frac{1}{e} |G|^{1/r}.$$

Доказательство. Пусть группа G имеет порядок n . Тогда любой элемент группы может быть записан как произведение не более чем d элементов из порождающего множества S . Поскольку G является абелевой группой, то n не превышает числа способов, которыми не более чем d объектов могут быть выбраны из множества $r + 1$ объектов (порождающее множество S и нейтральный элемент) с повторениями. Тогда, число n удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$n \leq \binom{r+d}{d} = \frac{(r+d)!}{r!d!} \leq \frac{(r+d)^r}{r!} \leq \frac{(rd)^r}{r!} \leq (ed)^r,$$

здесь e является основанием натурального логарифма. Последнее неравенство получается с учетом формулы Стирлинга, и из него следует нижняя граница на диаметр. \square

Более точная оценка на диаметр получается в предположении, что $r \leq |G|^{1/r} \leq d$. В этом случае имеем:

$$n \leq \binom{r+d}{d} = \frac{(r+d)!}{r!d!} \leq \frac{(r+d)^r}{r!} \leq \frac{(2d)^r}{r!} \leq \left(\frac{2ed}{r}\right)^r,$$

что даёт следующее утверждение [4].

Утверждение 9.2.1 Пусть G является абелевой группой G с порождающим множеством $S \neq S^{-1}$, $|S| = r$, причем $r \leq |G|^{1/r} \leq d$. Тогда диаметр графа Кэли $\text{Cay}(G, S)$ удовлетворяет неравенству:

$$\text{diam}(\text{Cay}(G, S)) \geq \frac{r}{2e} |G|^{1/r}.$$

Оценка на диаметр графа Кэли в утверждении 9.2.1 является точной. Имеется класс графов, на котором она достигается [4]. Для целых положительных n и r определим группу $\mathbb{Z}_{n^{1/r}}^r$ как декартово произведение r конечных аддитивных групп $\mathbb{Z}_{n^{1/r}}$, т. е. $\mathbb{Z}_{n^{1/r}}^r = \mathbb{Z}_{n^{1/r}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n^{1/r}}$. Тогда, граф Кэли на группе $\mathbb{Z}_{n^{1/r}}^r$ относительно порождающего множества S , состоящего из r единичных векторов стандартного базиса, имеет диаметр $\text{diam}(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{n^{1/r}}^r, S)) = O(rn^{1/r})$.

9.3 Диаметр графа Кэли на неабелевой группе

В 1988 г. Л. Бабаи и А. Сереш [10] выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза 9.3.1 Найдется такое число C , что для любой неабелевой конечной простой группы G диаметр любого графа Кэли на этой группе не будет превосходить $(\log_2 |G|)^C$.

В 1989 г. Л. Бабаи, В. М. Кантор и А. Любоцкий [9] получили оценку на диаметр графов Кэли при условии, что число элементов порождающего множества ограничено сверху.

Теорема 9.3.1 *Всякая неабелева конечная простая группа G имеет порождающее множество S мощности $|S| \leq 7$ такое, что граф Кэли на этой группе относительно этого порождающего множества имеет диаметр $O(\log_2 |G|)$.*

При доказательстве теоремы существенно используется классификация конечных простых групп, а именно тот факт, что имеется только конечное число спорадических групп, которые не оказывают существенного влияния на результат. Кроме этого, в доказательстве используются некоторые свойства групп Ли. Изучение всех этих фактов лежит за рамками настоящего курса, поэтому мы опускаем доказательство теоремы.

Заметим, что утверждение теоремы 9.3.1 и гипотеза 9.3.1 не распространяются на циклические группы простого порядка. Кроме этого, в [9] отмечалось, что диаметр любого графа Кэли на абелевой группе G порядка n с порождающим множеством S больше, чем $\frac{1}{2}(n^{1/|S|} - 1)$. Таким образом, утверждение теоремы 9.3.1 не распространяется на абелевы группы, в сравнении с которыми и в соответствии с гипотезой 9.3.1 диаметр произвольного графа Кэли на любой неабелевой конечной простой группе всегда будет «маленьким».

9.4 Диаметр графов Кэли на симметрической и знакопеременной группах

Если гипотеза 9.3.1 окажется верной, то можно ожидать, что будет найдено большое число графов Кэли на неабелевых конечных простых группах с небольшим диаметром. Однако, на сегодняшний день проблема является открытой даже для знакопеременной группы A_n , состоящей из всех чётных перестановок. Некоторые результаты, подтверждающие гипотезу 9.3.1, представлены в этом разделе.

Первый результат был получен Л. Бабаи и А. Сереш [10] в 1988 г. для симметрической и знакопеременной групп.

Теорема 9.4.1 *Если $G \in \{\text{Sym}_n, A_n\}$, то диаметр любого графа Кэли на группе G не превосходит $\exp((n \ln n)^{1/2})(1 + o(1))$.*

В доказательстве этой теоремы используются асимптотические оценки Э. Ландау [60], полученные им в 1909 г. на максимальный порядок перестановок ограниченной степени, где под степенью перестановки понимается число перемещенных ею точек.

В 1992 г. Л. Бабаи и А. Сереш [11] выдвинули следующую гипотезу о диаметре графа Кэли на знакопеременной группе.

Гипотеза 9.4.1 *Диаметр любого графа Кэли на группе A_n всегда меньше n^C , где C – некоторая постоянная.*

Заметное продвижение в этом направлении было сделано Вэньцзюнь Сяо [82]. В 2006 г. он получил результат, для изложения которого нам понадобятся дополнительные определения и обозначения.

Две подгруппы H_1 и H_2 называются *сопряженными*, если найдется элемент $g \in G$ такой, что $g H_1 g^{-1} = H_2$. Подгруппа группы G , порожденная множеством S , обозначается как $\langle S \rangle$. Если H является подгруппой группы G , то через H^G обозначим подгруппу G , порожденную всеми подгруппами, сопряженными с H . *Индекс подгруппы H в группе G* определяется как число смежных классов H в G и обозначается как $[G : H]$.

Теорема 9.4.2 *Пусть $G = \langle S \rangle$, где $e \notin S = S^{-1}$, является некоторой подгруппой симметрической группы Sym_n , а k есть некоторая постоянная. Тогда, если найдется элемент $\pi \in S$ степени $\text{deg}(\pi) \leq k$ такой, что $\langle \pi^G \rangle = G$, то $\text{diam}(\text{Cay}(G, S)) \leq n^{2k+1}$.*

Доказательство теоремы опирается на следующие утверждения.

Утверждение 9.4.1 *Пусть $G = \langle S \rangle$, где $e \notin S = S^{-1}$, есть некоторая конечная группа, а L является любой подгруппой группы G с индексом $[G : L] = b$. Тогда $G = L(e \cup S) S^{b-2}$.*

Доказательство. Очевидно, что при $b = 1$ утверждение верно. Пусть $b \geq 2$. Тогда имеем:

$$L \subseteq L(e \cup S) \subseteq \dots \subseteq L(e \cup S) S^m \subseteq \dots,$$

где m есть некоторое неотрицательное число.

Поскольку группа G является конечной, то найдется неотрицательное число l такое, что $L(e \cup S)S^l = L(e \cup S)S^{l+1}$ и, следовательно, $L(e \cup S)S^l = L(e \cup S)S^{l+t}$, где t может быть любым неотрицательным числом. Кроме этого, группа G порождается S , следовательно, должно выполняться равенство:

$$G = L(e \cup S)S^l. \quad (9.1)$$

Покажем, что всегда найдется такое число $l \leq b - 2$, для которого будет выполняться равенство (9.1). В самом деле, если

$$L \subset L(e \cup S) \subset \dots \subset L(e \cup S)S^{b-2},$$

то $L(e \cup S)$ содержит, по крайней мере, два смежных класса по подгруппе L в группе G , а $L(e \cup S)S^{b-2}$ содержит, по крайней мере, b смежных классов по подгруппе L в группе G . Таким образом, имеем $G = L(e \cup S)S^{b-2}$. Следовательно, всегда найдется такое неотрицательное число $l \leq b - 2$, для которого выполняется равенство (9.1). \square

Следствие 9.4.1 Пусть $H = \langle S^2 \rangle$ и $h = |G|$. Тогда:

- 1) если $S \not\subseteq H$, то $G = H \cup Hs$, где $H = S^{h-2}$ и $s \in S$;
- 2) если $S \subseteq H$, то $G = H = S^{h-2}$.

Доказательство. (1) Предположим, что S не содержится в H . Тогда, $G = H \cup Hs$, где s является некоторым элементом из S , и, следовательно, $h = |G| = 2|H|$ является четным числом. Таким образом, $S^{h-2} \subseteq H$. Из Утверждения 9.4.1 следует, что при $L = e$ выполняется $G = (e \cup S)S^{h-2}$. Очевидно, что $S \cap H = \emptyset$, следовательно, $H = S^{h-2}$.

(2) Пусть $S \subseteq H$. Из утверждения 9.4.1 следует, что при $L = e$ мы имеем $G = (e \cup S)S^{h-2}$. Следовательно, найдется такое неотрицательное число m , что $G = S^m$. Пусть m будет наименьшим положительным числом, для которого $G = S^m$ выполняется. Покажем, что $m \leq h - 1$. На самом деле, мы можем доказать, что

$$0 < |S| < |S^2| < \dots < |S^m|. \quad (9.2)$$

Если $|S^i| = |S^{i+1}|$, где $i \leq m - 1$, тогда $|S^i s_1| = |S^i s_2| = |S^{i+1}|$ для любых $s_1, s_2 \in S$. Следовательно, $S^i s_1 = S^i s_2 = S^{i+1}$ и $S^i = S^i s_2 s_1^{-1}$ для любых $s_1, s_2 \in S$. Таким образом, имеем $S^i = S^{i+2}$, и поэтому $G = S^i$, где $i \leq m - 1$, что противоречит минимальности выбранного числа m . Следовательно, $|S^m| \geq m + 1$ по (9.2), а из определения m следует, что $m \leq h - 1$. Откуда $G = H = S^{h-2}$, что завершает доказательство. \square

Теперь докажем теорему 9.4.2.

Доказательство. Пусть $\Delta = \{1, 2, \dots, k\}$ есть множество точек, перемещенных перестановкой π . Тогда порядок $|\pi|$ перестановки π будет удовлетворять неравенству $|\pi| \leq k!$.

Пусть L будет поточечным стабилизатором в группе G на множестве $\Delta = \{1, 2, \dots, k\}$, т. е. $L = \{g \in G \mid gx = x, \text{ для любого } x \in \Delta\}$. Тогда перестановка π и подгруппа L коммутируют. Из утверждения 9.4.1 следует, что $G = L(e \cup S) S^{m-2}$, где $m = n(n - 1) \dots (n - k + 1)$. Очевидно, что $S \cap H = 0$, следовательно, $H = S^{h-2}$. Известно [46, с. 12], что G является произведением всех различных подгрупп, сопряженных с подгруппой $\langle \pi \rangle$. Но поскольку перестановка π и подгруппа L коммутируют, а $G = L(e \cup S) S^{m-2}$, то имеем:

$$G = \langle \pi \rangle^{t_1} \langle \pi \rangle^{t_2} \dots \langle \pi \rangle^{t_m},$$

где $t_i \in (e \cup S) S^{m-2}$, $1 \leq i \leq m$, являются представителями смежных классов подгруппы L в группе G .

Так как $|\pi| \leq k!$, то $\langle \pi \rangle \subseteq S^{k!}$. Таким образом, имеем:

$$G = (S^{k!})^m ((e \cup S) S^{m-2})^{2m} = (e \cup S) S^{3n^{2k}-1} = (e \cup S) S^{n^{2k+1}-1}.$$

Следовательно, $\text{diam}(\text{Cay}(G, S)) \leq n^{2k+1}$, что и требовалось доказать. \square

При исследовании диаметров графов Кэли интерес представляют не только общие теоретические результаты, но и частные случаи решения задачи для конкретных семейств графов. В следующей главе рассмотрим известную задачу определения диаметра Рамсаке графа.

9.5 Упражнения

1. Привести примеры графов Кэли диаметра 2 и 3.
2. Привести пример графа Кэли на абелевой группе, удовлетворяющего условиям теоремы 9.2.1.
3. Привести пример графа Кэли на неабелевой группе, удовлетворяющего условиям теоремы 9.4.1.
4. Найти префикс-реверсальное расстояние от тождественной перестановки до перестановки $\pi = [1\ 2\ 4\ 5\ 3\ 6\ 7]$. Это расстояние является диаметральным в графе?
5. Вычислить диаметр графа Коксетера. Является ли он графом Кэли?
6. Какой из трех графов на симметрической группе, порожденных транспозициями, имеет наименьший диаметр для любого $n \geq 3$: транспозиционный граф T_n , Star граф S_n или Bubble-sort граф BS_n ?
7. Какой из графов пяти правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) имеет наибольший диаметр? Чему он равен? Является ли этот граф графом Кэли?
8. Построить граф Кэли на аддитивной группе \mathbb{Z}_{10} относительно порождающего множества $\{2, 3, 7, 8\}$ и определить его диаметр.
9. Построить кубический граф на знакопеременной группе A_4 и определить его диаметр. Сравнить полученный результат с верхней оценкой теоремы 9.4.1. Подтверждает ли этот результат гипотезу 9.4.1?
10. Найти диаметр графа фуллерена C_{60} , изображённого на рис. 11. Сравнить полученный результат с верхней оценкой теоремы 9.4.1. Подтверждает ли этот результат гипотезу 9.4.1?

Глава 10

Pancake problem

Нахождение диаметра графа Кэли с заданными группой и порождающим множеством является непростой задачей. В частности, эта задача является открытой для Pancake графа. В этой главе рассмотрим алгоритм эффективной сортировки перестановок префикс-реверсалами, позволяющий получить верхнюю оценку на диаметр Pancake графа.

10.1 Постановка задачи

Свое название граф получил благодаря *Pancake problem*, поставленной Я. Э. Гудманом [28] в 1975 г. Автор задавался следующим вопросом:

«Каково минимальное количество флипов, позволяющих упорядочить стопку блинчиков разного размера в соответствии с их размером от минимального наверху до максимального внизу, где под флипом понимается операция переворачивания стопки блинчиков от верхнего до некоторого фиксированного?».

Если перенумеровать все блинчики в стопке от 1 до n в соответствии с их размером, то получим некоторую перестановку, на которой префикс-реверсал выполняет ту же операцию, что и флип на стопке блинчиков. Тогда задача сводится к поиску расстояния между произвольной перестановкой π и тождественной перестановкой $I_n = [1\ 2\ \dots\ n]$ в графе P_n , и

в худшем случае мы получаем диаметр Рамсаке графа. Эту задачу также называют *сортировка префикс-реверсалами* [33].

Задача нахождения диаметра Рамсаке графа представляет интерес в прикладных областях знаний. Так, в информатике Рамсаке граф используется для моделирования n -мерных компьютерных сетей (RamSake networks), в которых вершины соответствуют процессорам, а диаметр отражает сетевую задержку при передаче информации в системе [40]. В молекулярной биологии геном представляют в виде перестановки, в которой гены занумерованы от 1 до n . В 1986 г. Дж. Д. Палмер и Л. А. Хердон [68] обнаружили, что X -хромосомы человека и мыши содержат одно и то же количество одинаковых генов, но в X -хромосоме человека они упорядочены как [46172358], а в X -хромосоме мыши как [12345678]. При этом, одним из способов мутации является следующий [64]. При переходе от одного вида к другому набор генов остается одним и тем же, но меняется порядок записи генов аналогично тому, как это происходит при применении префикс-реверсала к перестановке. Таким образом, Рамсаке граф служит графовой моделью при исследовании мутационных процессов в геномах, а его диаметр отражает их удаленность друг от друга.

В настоящий момент задача нахождения диаметра Рамсаке графа не решена. Тривиальная верхняя оценка на диаметр графа P_n получается на основе следующего алгоритма простой сортировки префикс-реверсалами.

Алгоритм 1: простая сортировка префикс-реверсалами

Шаг 0. Входные данные: перестановка $\pi = [\pi_1 \dots \pi_n]$.

Шаг 1. Найти в перестановке π наибольший элемент π_i , $1 \leq i \leq n$, для которого выполняется $\pi_i \neq i$. Если $i = 1$, то $\pi := \pi r_{\pi_i}$, иначе $\pi := \pi r_i r_{\pi_i}$. Повторять шаг 1, пока не получится тождественная перестановка I_n .

Алгоритм 1 закончит работу не более, чем за $n - 1$ шагов, на каждый из которых требуется не более двух префикс-реверсалов, что дает

верхнюю оценку на диаметр Рамсаке графа:

$$\text{diam}(P_n) \leq 2(n - 1).$$

Простая нижняя оценка получается из следующих соображений. Введем дополнительные определения и обозначения. Если в перестановке $\pi = [\pi_1\pi_2\dots\pi_n]$ выполняется одно из следующих двух условий: либо $|\pi_i - \pi_{i+1}| = 1$, либо $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} = \{1, n\}$, где $1 \leq i \leq n - 1$, то пару $(i, i + 1)$ называют *смежностью*. В тождественной перестановке пара $(1, n)$ также считается смежностью. Если в перестановке $\pi = [\alpha\beta\gamma]$, состоящей из сегментов α, β, γ , пара $(i, i + 1)$ является смежностью для любого $i = |\alpha| + 1, \dots, |\alpha| + |\beta| - 1$, а пары $(|\alpha|, |\alpha| + 1)$ и $(|\alpha| + |\beta|, |\alpha| + |\beta| + 1)$ не являются смежностями, то β называется *блоком*. Если элемент не в блоке, то он является *свободным*. Так, в перестановке $[654132]$ имеются два блока, $[654]$ и $[32]$, и один свободный элемент 1, а в перестановке $[321654]$ имеется 5 смежностей, один блок и ни одного свободного элемента.

Таким образом, с одной стороны, тождественная перестановка I_n имеет один блок и n смежностей. С другой стороны, для любого $n > 4$ всегда найдется, по крайней мере, одна перестановка, не содержащая ни одной смежности. Например, для $n = 5$ такой перестановкой будет $[53142]$. Заметим, что применение любого префикс-реверсала может привести к появлению не более, чем одной новой смежности в перестановке. Следовательно, для перестановки, не имеющей ни одной смежности, понадобится не менее n префикс-реверсалов, чтобы получить тождественную перестановку, что даёт следующую простую нижнюю оценку:

$$n \leq \text{diam}(P_n).$$

Первая нетривиальная верхняя оценка на диаметр Рамсаке графа была получена независимо Э. Дьери и Д. Тураном [36] в 1978 г. и В. Г. Гейтсом и Х. Х. Пападимитроу [33] в 1979 г. Кроме этого, в [33] также получена нетривиальная нижняя оценка на диаметр графа, которая в 1997 г. была улучшена М. Х. Хейдари и И. Х. Садбороу [40].

Далее рассмотрим эффективно сортирующий перестановки алгоритм Гейтса-Пападимитроу, на основе которого получается верхняя оценка на

диаметр графа. Нижние оценки на диаметр приводятся без доказательства. В заключении приводится таблица точных значений диаметра графа P_n для $n \leq 19$.

10.2 Алгоритм Гейтса-Пападимитроу

Эффективный алгоритм сортировки префикс-реверсалами преобразует исходную перестановку в новую перестановку, имеющую большее число смежностей. Алгоритм работает до тех пор, пока результирующая перестановка не получит n смежностей, т. е. пока мы не получим тождественную перестановку I_n . При этом, на каждом шаге алгоритма определяется последовательность префикс-реверсалов, применение которых приводит к увеличению числа смежностей в перестановке.

Увеличение числа смежностей в перестановке возможно по одной из следующих схем:

- 1) два свободных элемента объединяются и создают новый блок;
- 2) свободный элемент присоединяется к существующему блоку;
- 3) объединяются два блока;
- 4) объединяются свободный элемент и два блока.

В последнем случае возникает максимальное увеличение числа смежностей в новой перестановке: на три. В целом, различные варианты расположения свободных элементов и блоков в перестановке приводят к девяти возможным случаям алгоритма. При этом оказывается, что максимальное число префикс-реверсалов, необходимых для появления новой смежности, равно четырём. Так, перестановка вида $\pi = [k-1 \dots 1 n \dots k]$ преобразуется в тождественную перестановку применением к ней четырёх префикс-реверсалов, а именно, $\pi r_n r_{n-k+1} r_n r_{k-1} = I_n$.

В процессе работы алгоритма формируется таблица 3.1, содержащая информацию о числе применяемых префикс-реверсалов, об увеличении числа смежностей и об изменении числа блоков в перестановке в каждом случае. Эта информация используется для получения верхней оценки на диаметр Рапсаке графа.

В описании алгоритма под символом o понимается либо 1, либо -1 .

Таблица 3.1. Число префикс-реверсалов, возникающих в алгоритме 2, а также соответствующее увеличение числа смежностей и изменение числа блоков в перестановке

Случай	1	2	31	32	33	34	4	5	7
число префикс-реверсалов	1	1	4	4	4	4	1	1	2
увеличение числа смежностей	1	1	2	3	3	3	1	1	1
изменение числа блоков	1	0	-1	0	-1	-2	0	-1	-1

В частности, записи $t + o$ и $t - o$ дают два случая: 1) $t + 1$ и $t - 1$, когда $o = 1$; и 2) $t - 1$ и $t + 1$, когда $o = -1$. В каждом из приведенных ниже случаев выбор o делается независимо.

Алгоритм 2: эффективная сортировка префикс-реверсалами

Шаг 0. Входные данные: перестановка $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n] \neq I_n$ с числом смежностей $a(\pi)$ и числом блоков $b(\pi)$. Если $a(\pi) = n - 1$, то переходим на шаг 2, в противном случае переходим на шаг 1.

Шаг 1. Пусть $\pi_1 = t$. Тогда возможны следующие случаи.

Случай 1. Если t является свободным элементом и $\pi_i = t + o$ также является свободным элементом, то получаем новую перестановку $\pi^* = \pi r_{i-1}$, т. е.:

$$[t \dots \pi_{i-1} t + o \pi_{i+1} \dots \pi_n] r_{i-1} = [\pi_{i-1} \dots t t + o \pi_{i+1} \dots \pi_n].$$

Заметим, что $a(\pi^*) = a(\pi) + 1$ и $b(\pi^*) = b(\pi) + 1$, т. е. число смежностей и число блоков у новой перестановки увеличились на единицу.

Случай 2. Если t является свободным, а элемент $\pi_i = t + o$ является первым элементом некоторого блока, то получаем новую перестановку π^* аналогично случаю 1, а именно: $\pi^* = \pi r_{i-1}$. При этом, $a(\pi^*) = a(\pi) + 1$, а $b(\pi^*) = b(\pi)$, т. е. число смежностей у новой перестановки увеличилось на единицу, а число блоков не изменилось.

Случай 3. Если t является свободным, а $\pi_i = t + o$ и $\pi_j = t - o$ являются последними элементами некоторых блоков, то получаем новую перестановку $\pi^* = \pi r_i r_{i-1} r_j r_{j-i}$, т. е.

$$[t \dots \pi_{i-1} t + o \dots \pi_{j-1} t - o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_i} [t + o \pi_{i-1} \dots t \dots \pi_{j-1} t - o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{i-1}}$$

$$[\dots \pi_{i-1} t + o t \dots \pi_{j-1} t - o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_j} [t - o \pi_{j-1} \dots t t + o \pi_{i-1} \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{j-i}} \\ \rightarrow [\dots \pi_{j-1} t - o t t + o \pi_{i-1} \dots \pi_n].$$

Таким образом, объединение свободного элемента и двух независимых блоков требует четыре префикс-реверсала. При этом, число смежностей и число блоков в новой перестановке будут определяться в зависимости от следующих четырёх вариантов, которые возникают в перестановке перед применением к ней последнего преобразования префикс-реверсалом. Перед применением предпоследнего префикс-реверсала начало перестановки и элемент, соседний с элементом $t - o$, могут:

- 31 - оказаться несмежными;
- 32 - сформировать новый блок;
- 33 - объединить блок со свободным элементом;
- 34 - объединить два блока.

Увеличение числа смежностей и изменение числа блоков в перестановке для каждого из этих случаев представлено в таблице. 3.1.

Случай 4. Если t находится в блоке, а элемент $\pi_i = t + o$ является свободным, то получаем новую перестановку π^* аналогично Случаю 2, а именно: $\pi^* = \pi r_{i-1}$, причем $a(\pi^*) = a(\pi) + 1$, $b(\pi^*) = b(\pi)$.

Случай 5. Если t находится в блоке, а элемент $\pi_i = t + o$ является первым элементом некоторого другого блока, то получаем новую перестановку π^* аналогично предыдущему случаю, т. е. $\pi^* = \pi r_{i-1}$, с параметрами $a(\pi^*) = a(\pi) + 1$ и $b(\pi^*) = b(\pi) - 1$. Таким образом, в этом случае число смежностей у новой перестановки увеличилось на единицу, а число блоков уменьшилось на единицу.

Случай 6. Если t находится в блоке, последним элементом которого является $\pi_s = t + k \cdot o$, $k > 0$, элемент $\pi_j = t - o$ является последним элементом другого блока, а элемент $\pi_i = t + (k+1) \cdot o$ является свободным, то, в зависимости от расположения двух блоков и свободного элемента $t + (k+1) \cdot o$, новая перестановка π^* получается последовательно либо способом (a):

$$[t \dots \pi_{s-1} t + k \cdot o \pi_{s+1} \dots \pi_{i-1} t + (k+1) \cdot o \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} t - o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\ [t + (k+1) \cdot o \pi_{i-1} \dots \pi_{s+1} t + k \cdot o \pi_{s-1} \dots t \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} t - o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{i-s}}$$

$$\begin{aligned}
& [\dots \pi_{i-1} t + (k+1) \cdot o t + k \cdot o \pi_{s-1} \dots t \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} t - o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_j} \\
& [t - o \dots \pi_{i+1} t \dots t + k \cdot o t + (k+1) \cdot o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{j-i}} \\
& [\dots t - o t \dots t + k \cdot o t + (k+1) \cdot o \dots \pi_n] = \pi^*,
\end{aligned}$$

либо способом (b):

$$\begin{aligned}
& [t \dots \pi_{s-1} t + k \cdot o \pi_{s+1} \dots \pi_{j-1} t - o \pi_{j+1} \dots \pi_{i-1} t + (k+1) \cdot o \pi_{i+1} \dots \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\
& [t + (k+1) \cdot o \pi_{i-1} \dots \pi_{j+1} t - o \pi_{j-1} \dots \pi_{s+1} t + k \cdot o \pi_{s-1} \dots t \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{i-s}} \\
& [\dots \pi_{j-1} t - o \pi_{j+1} \dots \pi_{i-1} t + (k+1) \cdot o t + k \cdot o \dots t \pi_{i+1} \dots \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\
& [t \dots t + k \cdot o t + (k+1) \cdot o \dots \pi_{j+1} t - o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{i-j+s}} \\
& [\dots t + (k+1) \cdot o t + k \cdot o \dots t t - o \dots \pi_n] = \pi^*.
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае 6 (a) перестановка π^* получается из перестановки π с использованием четырёх префикс-реверсалов следующего вида: $\pi^* = \pi r_i r_{i-s} r_j r_{j-i}$. В случае 6 (b) перестановка π^* получается из перестановки π с использованием также четырёх префикс-реверсалов, но они имеют такой вид: $\pi^* = \pi r_i r_{i-s} r_i r_{i-j+s}$. Изменение числа смежностей и числа блоков в новой перестановке соответствует четырем вариантам, возникающим в случае 3, и полностью совпадает с уже представленными для случая 3 значениями в таблице 3.1.

Случай 7. Если t находится в блоке, последним элементом которого является $\pi_i = t + k \cdot o$, $k > 0$, а $\pi_j = t + (k+1) \cdot o$ находится в другом блоке, то, в зависимости от расположения π_j : (a) в начале блока; (b) в конце блока, перестановка π^* получается следующим образом:

$$\begin{aligned}
(a) : & [t \dots \pi_{i-1} t + k \cdot o \pi_{i+1} \dots t + (k+1) \cdot o \pi_{j+1} \dots \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\
& [t + k \cdot o \pi_{i-1} \dots t \pi_{i+1} \dots t + (k+1) \cdot o \pi_{j+1} \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{j-1}} \\
& [\dots t \dots t + k \cdot o t + (k+1) \cdot o \dots \pi_n] = \pi^*. \\
(b) : & [t \dots \pi_{i-1} t + k \cdot o \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} t + (k+1) \cdot o \dots \pi_n] \xrightarrow{r_j} \\
& [t + (k+1) \cdot o \pi_{j-1} \dots \pi_{i+1} t + k \cdot o \dots t, \dots \pi_n] \xrightarrow{r_{j-i}} \\
& [\dots t + (k+1) \cdot o t + k \cdot o \dots t \dots \pi_n] = \pi^*.
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае 7 (a) перестановка π^* получается из перестановки π с использованием двух префикс-реверсалов следующего вида: $\pi^* = \pi r_i r_{j-1}$. В случае 7 (b) перестановка π^* получается из перестановки π с использованием также двух префикс-реверсалов, но они имеют такой вид: $\pi^* = \pi r_j r_{j-i}$. В обоих случаях $a(\pi^*) = a(\pi) + 1$ и $b(\pi^*) = b(\pi) - 1$, т. е. число смежностей у новой перестановки увеличилось на единицу, а число блоков уменьшилось на единицу.

Все случаи шага 1, реализующие описанные в начале раздела схемы увеличения числа смежностей в перестановке, рассмотрены. Положим $\pi := \pi^*$, $a(\pi) := a(\pi^*)$, $b(\pi) := b(\pi^*)$. Если π имеет $n - 1$ смежностей, то переходим на шаг 2, в противном случае повторяем шаг 1.

Шаг 2. Перестановка, имеющая $n - 1$ смежностей, состоит из одного блока. Возможны следующие случаи.

Случай 8. Пусть $\pi = [i - 1 \dots 1 n \dots i]$, где $\pi_i = n$, тогда тождественная перестановка I_n получается из перестановки π с использованием четырёх префикс-реверсалов так, что $I_n = \pi r_n r_{n-i+1} r_n r_{i-1}$, т. е.

$$\begin{aligned} [i - 1 \dots 1 n \dots i] &\xrightarrow{r_n} [i \dots n 1 \dots i - 1] \xrightarrow{r_{n-i+1}} [n \dots i 1 \dots i - 1] \xrightarrow{r_n} \\ &[i - 1 \dots 1 i \dots n] \xrightarrow{r_{i-1}} [1 \dots i - 1 i \dots n] = I_n. \end{aligned}$$

Случай 9. Пусть $\pi = [i \dots n 1 \dots i - 1]$, где $\pi_{n-i+1} = n$, тогда тождественная перестановка I_n получается из перестановки π с использованием трех префикс-реверсалов так, что $I_n = \pi r_{n-i+1} r_n r_{i-1}$, т. е.

$$\begin{aligned} [i \dots n 1 \dots i - 1] &\xrightarrow{r_{n-i+1}} [n \dots i 1 \dots i - 1] \xrightarrow{r_n} [i - 1 \dots 1 i \dots n] \xrightarrow{r_{i-1}} \\ &[1 \dots i - 1 i \dots n] = I_n. \end{aligned}$$

Таким образом, все случаи рассмотрены. Алгоритм полностью описан.

10.3 Верхняя оценка на диаметр Рапсаке графа

Максимальное число преобразований в алгоритме 2, которое необходимо применить к произвольной перестановке, дает верхнюю оценку на диаметр Рапсаке графа.

Оценка на число преобразований получена в следующей теореме [33].

Теорема 10.3.1 Алгоритм 2 переводит любую перестановку в тождественную не более, чем за $(5n + 5)/3$ преобразований.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если исходная перестановка имеет меньше, чем $n - 1$ смежностей, то один из случаев 1-7 всегда имеет место. Следовательно, алгоритм будет работать, пока не получится перестановка с $n - 1$ смежностями. Для такой перестановки алгоритм продолжает работать в случаях 8-9 преобразующих перестановку с $n - 1$ смежностями и одним блоком в тождественную перестановку, имеющую n смежностей и один блок. После этого алгоритм прекращает свою работу. При этом, на каждом шаге алгоритма, по крайней мере, одна новая смежность появляется в перестановке и ни одна из существующих смежностей не исчезает. Остается показать, что для этого требуется не более, чем $(5n + 5)/3$ преобразований.

Обозначим через x_i , где $i = 1, \dots, 7$, число возникновений случая i в алгоритме 2 и рассмотрим все преобразования, которые происходят в первых семи случаях шага 1, полагая $x_3 \equiv x_6$. Тогда общее число z преобразований, которые происходят в случаях 1-7, запишем в виде:

$$z = x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_7,$$

где коэффициент при x_i соответствует числу префикс-реверсалов, используемых для преобразования перестановки в случае i . Случай 3 может быть более детально представлен как $x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$.

Пусть $a = a(\pi)$. Поскольку по завершении шага 1 алгоритма 2 число смежностей перестановки равно $n - 1$, то

$$n - 1 = a + x_1 + x_2 + 2x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} + 3x_{34} + x_4 + x_5 + x_7. \quad (10.1)$$

Пусть $b = b(\pi)$. Поскольку по завершении шага 1 алгоритма 2 результирующая перестановка будет иметь только один блок, тогда

$$b + x_1 - x_{31} - x_{33} - 2x_{34} - x_5 - x_7 = 1. \quad (10.2)$$

Заметим, что $b \leq a$, следовательно, из (10.1) имеем:

$$x_1 + x_2 + 2x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} + 3x_{34} + x_4 + x_5 + x_7 + b \leq n - 1. \quad (10.3)$$

Таким образом, в худшем случае требуется максимизировать общее число преобразований z при условиях (10.2) и (10.3). Утверждается, что максимум достигается для:

$$x_1 = (n + 1)/3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = x_{31} = (n - 2)/3, \quad x_4 = x_5 = x_7 = b = 0,$$

и при этих значениях $z = (5n - 7)/3$.

В самом деле, используя принцип двойственности в линейном программировании, нам достаточно минимизировать величину:

$$\varpi = \xi_2 + (n - 1)\xi_3,$$

где ξ_2 и ξ_3 соответствуют изменению числа блоков и числа смежностей в перестановке, при условии выполнения следующих неравенств, которые получаются из таблицы 3.1:

$$\begin{aligned} \xi_2 + \xi_3 &\geq 1, \\ \xi_3 &\geq 1, \\ -\xi_2 + 2\xi_3 &\geq 4, \\ 3\xi_3 &\geq 4, \\ -\xi_2 + 3\xi_3 &\geq 4, \\ -2\xi_2 + 3\xi_3 &\geq 4, \\ \xi_3 &\geq 1, \\ -\xi_2 + \xi_3 &\geq 1, \\ -\xi_2 + \xi_3 &\geq 2, \\ \xi_2 + \xi_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Чтобы проверить наше утверждение, нужно найти пару (ξ_2, ξ_3) , удовлетворяющую перечисленным выше неравенствам, а также равенству $\varpi = \xi_2 + (n - 1)\xi_3 = (5n - 7)/3$. Такой парой оказываются значения $\xi_2 = -2/3$, $\xi_3 = 5/3$.

Таким образом, алгоритм 2 даёт перестановку с $n - 1$ смежностями не более, чем за $(5n - 7)/3$ преобразований. Тождественная перестановка получается из перестановки, имеющей $n - 1$ смежностей, не более, чем за 4 преобразования, что следует из случаев 8-9 алгоритма 2. Следовательно, алгоритм 2 переводит любую перестановку в тождественную не более, чем за $(5n + 5)/3$ преобразований. \square

Следствие 10.3.1 *Диаметр Рамсаке графа P_n , $n \geq 3$, удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\text{diam}(P_n) \leq (5n + 5)/3.$$

10.4 Нижняя оценка на диаметр Рамсаке графа

Нижняя оценка на диаметр Рамсаке графа P_n была получена для перестановки длины n , кратной 8, не имеющей ни одной смежности, которая определяется следующим образом.

Пусть $\tau = 17536428$, а $\tau_k = 1_k 7_k 5_k 3_k 6_k 4_k 2_k 8_k$, где $m_k = m + 8(k - 1)$, а k есть некоторое положительное целое число. Положим $\tau = \tau_1$ и рассмотрим перестановку

$$\chi = \tau_1 \overline{\tau_2} \tau_3 \overline{\tau_4} \cdots \tau_{m-1} \overline{\tau_m}, \quad (10.4)$$

где m является чётным числом, а $\overline{\tau_k} = 8_k 2_k 4_k 6_k 3_k 5_k 7_k 1_k$ для любого чётного $k \leq m$. Число элементов в перестановке χ равно $n = 8m$.

Обозначим через $f(\chi)$ минимальное число префикс-реверсалов, переводящих перестановку χ в тождественную перестановку. Тогда верны следующие оценки [33].

Факт 10.4.1 $17n/16 \leq f(\chi) \leq 19n/16$ для всех $n \equiv 0 \pmod{16}$.

Этот результат даёт первую нижнюю оценку на диаметр.

Следствие 10.4.1 *Диаметр Рамсаке графа P_n , $n \geq 3$, для n , кратных 16, ограничен снизу следующей величиной:*

$$17n/16 \leq \text{diam}(P_n).$$

В своей работе В. Г. Гейтс и Х. Х. Пападимитроу отмечали [33], что нижнюю оценку можно улучшить, если рассмотреть базовую перестановку из семи элементов (их базовая перестановка содержит восемь элементов). Они также выдвинули гипотезу о том, что для их «трудной» перестановки χ , заданной (10.4), требуется в точности $19n/16$ преобразований, т. е. $f(\chi) = 19n/16$. Однако, М. Х. Хейдари и И. Х. Садбороу

показали [39], что эта гипотеза неверна, а именно, им удалось найти такую последовательность префикс-реверсалов, которая дает для перестановки χ следующую верхнюю оценку:

$$f(\chi) \leq 9n/8 + 2.$$

М. Х. Хейдари и И. Х. Садбороу [40] также улучшили нижнюю оценку Гейтса-Пападимитроу на диаметр Рамсаке графа. Вместо базовой перестановки $\tau = 17536428$ они использовали перестановку $\zeta = 1753642$. На ее основе определяется перестановка $\zeta_k = 1_k 7_k 5_k 3_k 6_k 4_k 2_k$, где $\zeta_1 = \zeta$, $m_k = m + 7(k - 1)$, а k есть некоторое положительное целое число. Далее рассматривается перестановка

$$\varphi = \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_m, \quad (10.5)$$

где m является четным числом, а число элементов в φ равно $n = 7m$. Доказательство улучшенной нижней оценки на диаметр Рамсаке графа опирается на идеи В. Г. Гейтса и Х. Х. Пападимитроу [33].

Обозначим через $f(\varphi)$ минимальное число префикс-реверсалов, переводящих перестановку φ в тождественную перестановку.

Факт 10.4.2 $15n/14 \leq f(\varphi)$ для всех $n \equiv 0 \pmod{14}$.

Этот результат автоматически дает улучшенную нижнюю оценку на диаметр Рамсаке графа.

Следствие 10.4.2 Диаметр Рамсаке графа P_n , $n \geq 3$, для n , кратных 14, ограничен снизу следующей величиной:

$$15n/14 \leq \text{diam}(P_n).$$

10.5 Точные значения диаметра Рамсаке графа

В. Г. Гейтс и Х. Х. Пападимитроу в своей работе [33] привели точные значения диаметра Рамсаке графа P_n для $n \leq 9$. В работе 1997 г. М. Х. Хейдари и И. Х. Садбороу [40] дали точные значения диаметра P_n

для $n \leq 13$. Диаметр графа для $n = 14, 15$ стал известен в 2005 г., благодаря вычислениям Ю. Каноике, К. Канеко и Ю. Синано [56]. В своем алгоритме они использовали подход Хейдари-Садбороу. Параллельные вычисления позволили С. Асаи, Ю. Каноике, Ю. Синано и К. Канеко [5] в 2006 г. получить точные значения диаметра графа для $n = 16, 17$, а в 2011 г. Й. Цыбулькой [23] были получены точные значения диаметра графа для $n = 18, 19$.

Точные значения диаметра $d = \text{diam}(P_n)$ графа P_n для $2 \leq n \leq 19$ представлены ниже:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
d	1	3	4	5	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	22

10.6 Упражнения

1. Убедиться, что решением системы уравнений в конце доказательства теоремы 10.3.1 являются значения $\xi_2 = -2/3$, $\xi_3 = 5/3$.
2. Вычислить значения диаметра транспозиционного графа T_{19} , Star графа S_{19} или Bubble-sort графа BS_{19} . Сравнить полученные значения с диаметром Рапсаке графа P_{19} .
3. Сравнить точные значения диаметра графа P_n для $2 \leq n \leq 19$ с верхней оценкой на его диаметр (см. следствие 10.3.1).

Глава 11

Гамильтоновость графов Кэли

В этой главе продолжим говорить о графах Кэли, а именно - обсудим гипотезу о гамильтоновости любого графа Кэли, а также докажем теорему о гамильтоновости графов Кэли на произвольной конечной группе.

11.1 Гипотезы Ловаса и Бабаи

Задача проверки гамильтоновости графа была впервые сформулирована сэром В. Р. Гамильтоном в 1850 г. (см. [35]). Пусть $\Gamma = (V, E)$ является связным графом. Путь, содержащий каждую вершину графа Γ ровно один раз, называется *гамильтоновым*. Гамильтонов путь, начальная и конечная вершины которого совпадают, называется *гамильтоновым циклом*. Граф называют *гамильтоновым*, если в нём содержится гамильтонов цикл.

В настоящее время исследование гамильтоновости графов является одной из важных задач, решением которой занимаются специалисты в области теории графов и теории групп. Проверка гамильтоновости графа является одной из классических NP -полных проблем [32].

В алгебраической теории графов традиционной является задача гамильтоновости вершинно-транзитивных графов, которую можно сформулировать в виде следующего вопроса.

Проблема 11.1.1 *Всякий ли вершинно-транзитивный граф с более чем двумя вершинами имеет гамильтонов путь?*

История этого вопроса идёт от исследовательской задачи, поставленной в 1970 г. Л. Ловасом для симметричных (вершинно-транзитивных) графов в следующем виде [63]:

« ... построить конечный связный неориентированный граф, являющийся симметричным и не содержащий простой путь на всех вершинах графа. Граф является симметричным, если для любых двух вершин x и y в графе имеется автоморфизм, переводящий x в y ».

В большинстве научных обзоров, посвященных исследованию гамильтоновости графов (например, см. [24]), эта проблема формулируется в утвердительном виде и рассматривается как гипотеза Ловаса.

Гипотеза 11.1.1 *Всякий вершинно-транзитивный граф имеет гамильтонов путь.*

На сегодняшний день неизвестно, имеются ли вершинно-транзитивные графы, не содержащие гамильтоновы пути. Однако известно, что имеется четыре вершинно-транзитивных графа на более чем двух вершинах, которые имеют гамильтонов путь, но не имеют гамильтонова цикла:

- граф Петерсена, единственный кубический сильно регулярный граф с параметрами $(10, 3, 0, 1)$ на 10 вершинах и с 15 ребрами (см. рис. 1);

- граф Коксетера, единственный кубический дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{3, 2, 2, 1; 1, 1, 1, 2\}$ на 28 вершинах и с 42 ребрами) (см. рис. 8);

- графы, полученные из графов Петерсена и Коксетера заменой каждой вершины треугольником с сохранением смежности вершин.

Было замечено, что ни один из таких графов не является графом Кэли, поэтому сразу несколько математиков сформулировали следующую гипотезу.

Гипотеза 11.1.2 *Каждый граф Кэли на конечной группе имеет гамильтонов цикл.*

При этом оказалось, что имеется и противоположная точка зрения на ту же проблему. В частности, Л. Бабаи [8] высказал следующую гипотезу.

Гипотеза 11.1.3 *Для некоторого $\varepsilon > 0$, существует бесконечно много вершинно-транзитивных графов (и даже графов Кэли) Γ , не содержащих циклов длины $\geq (1 - \varepsilon)|V(\Gamma)|$.*

Единственный результат, полученный в этом направлении Л. Бабаи [7] в 1979 г. для вершинно-транзитивных графов, состоит в том, что вершинно-транзитивный граф с n вершинами имеет цикл длины $\geq \sqrt{3n}$. Очевидно, что это не дает ответа на его гипотезу.

На сегодняшний день обе предложенные гипотезы являются открытыми. Исчерпывающий обзор результатов, полученных в рамках гипотезы о гамильтоновости графов Кэли, был представлен в 1996 г. С. Курраном и Дж. Гальяном [24]. В частности, в 1983 г. Д. Марусич [65] доказал, что граф Кэли на абелевой группе является гамильтоновым.

Теорема 11.1.1 *Граф Кэли на абелевой группе с не менее чем тремя вершинами содержит гамильтонов цикл.*

В 1989 г. Б. Альспах и Кун-Цюань Чжан [2] доказали, что всякий кубический граф Кэли на диэдральной группе является гамильтоновым.

В книге А. Брауэра и В. Хаммерса, посвященной спектрам графов, отмечается, что все сильно регулярные графы с менее чем 99 вершинами являются гамильтоновыми, за исключением графа Петерсена [18, с. 127].

Одним из последних и наиболее впечатляющих результатов является доказательство гамильтоновости графов Кэли на произвольной конечной группе с небольшим порождающим множеством, предложенное в 2009 г. И. Паком и Р. Радоичичем [67]. Они дали оценку на размер порождающего множества S , а также показали, что эта оценка достигается на группе $G = \mathbb{Z}_2^n$, для которой мощность наименьшего порождающего множества равна $\log_2 |G|$. Для других групп размер наименьшего порождающего множества существенно меньше. Заметим, что этот результат связан со следующей гипотезой [67].

Гипотеза 11.1.4 *Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждой конечной группы G и каждого $k \geq \varepsilon \log_2 |G|$ вероятность $P(G, k)$ того, что граф Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ относительно случайного порождающего множества S размера k содержит гамильтонов цикл, удовлетворяет условию $P(G, k) \rightarrow 1$ при $|G| \rightarrow \infty$.*

С одной стороны, это условие слабее, чем гипотеза Ловаса. С другой стороны, оно не противоречит гипотезе Бабаи. В 2003 г. М. Кривелевич и Б. Судаков [58] показали, что для любого $\varepsilon > 0$ граф Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ с группой G достаточно большой мощности и с порождающим множеством S , которое формируется случайным образом из $\varepsilon(\log_2 |G|)^5$ порождающих, почти всегда является гамильтоновым. Таким образом, оценка в гипотезе 11.1.4 сводится к неравенству $k \geq \varepsilon(\log_2 |G|)^5$.

Доказательство результата И. Пака и Р. Радоичича базируется на двух теоремах следующего раздела, полученных в середине XX века.

11.2 Комбинаторные условия для гамильтоновости

Первым результатом в решении задачи о существовании гамильтонова цикла в графе Кэли является работа Э. Рапапорт-Штрассер [72], опубликованная в 1959 г. Для конечной группы G с порождающим множеством S , $|S| \leq 3$, представленным инволюциями, доказана следующая теорема. Под *инволюцией* понимается элемент $\alpha \in G$, $\alpha \neq e$, такой, что $\alpha^2 = e$.

Теорема 11.2.1 *Пусть G является конечной группой, порожденной тремя инволюциями α, β, γ такими, что $\alpha\beta = \beta\alpha$. Тогда граф Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ имеет гамильтонов цикл.*

Доказательство. Для любого $z \in G$ и любого $X \subset G$ обозначим

$$\vartheta_z(X) = \{g \in G \setminus X : g = xz, x \in X\}.$$

Обозначим через $H = \langle \beta, \gamma \rangle$ подгруппу группы G порядка $|H| = 2m$, т. е. подмножество H является группой относительно операции, определенной в G .

Пусть $X_1 = H$. Поскольку всякая конечная группа, порожденная двумя инволюциями, изоморфна диэдральной группе, следовательно, H является диэдральной группой, а значит, X_1 содержит гамильтонов цикл следующего вида:

$$e \rightarrow \beta \rightarrow \beta\gamma \rightarrow \beta\gamma\beta \rightarrow \dots \rightarrow (\beta\gamma)^{m-1}\beta \rightarrow (\beta\gamma)^m = e \quad (11.1)$$

Построим гамильтонов цикл в Γ по индукции. На шаге i мы получаем цикл, который покрывает вершины множества $X_i \subset G$. Более того, каждое множество X_i удовлетворяет следующему условию: $\vartheta_\beta(X_i) = \vartheta_\gamma(X_i) = \emptyset$. Это эквивалентно тому, что каждое множество X_i является объединением левых смежных классов по подгруппе H в G , где под левым смежным классом элемента $g \in G$ по подгруппе H в G понимается множество $gH = \{gh \mid h \in H\}$. По определению $\vartheta_\beta(X_1) = \vartheta_\gamma(X_1) = \emptyset$. Это даёт нам базу индукции.

Теперь предположим, что X_i определено, как ранее. Тогда либо имеем $\vartheta_\alpha(X_i) = \emptyset$ и в этом случае цикл на всех вершинах множества $X_i = G$ является искомым гамильтоновым циклом, либо найдется $y \in \vartheta_\alpha(X_i) \subset G \setminus X_i$. Заметим, что $yH \cap X_i = \emptyset$, поскольку иначе должно выполняться $yh = x \in X_i$ для некоторого $h \in H$, что означает $y = xh^{-1} \in X_i$, поскольку $h \in \langle \beta, \gamma \rangle$ и $z\beta, z\gamma \in X$ для всех $z \in X$.

Пусть $X_{i+1} = X_i \cup yH$. Очевидно, что $\vartheta_\beta(X_{i+1}) = \vartheta_\gamma(X_{i+1}) = \emptyset$. По индуктивному предположению, $x = y\alpha \in X_i$ принадлежит некоторому циклу на всех вершинах X_i . Тогда x должна быть соединена с $x\beta$ и $x\gamma$, поскольку $x\alpha^{-1} = y \notin X_i$. Рассмотрим цикл в yH , полученный умножением цикла, описанного (11.1), на y . Напомним, что по условию теоремы $\alpha\beta = \beta\alpha$. Это означает, что $x\beta\alpha = y\beta$. Уберем ребра $\{x; x\beta\}$ и $\{y; y\beta\}$ из циклов в X_i и yH , а добавим ребра $\{x; y\}$ и $\{x\beta; y\beta\}$. Это даёт нам цикл, который покрывает все вершины множества X_{i+1} , что завершает шаг индукции и доказательство. \square

Конечные группы, порожденные двумя элементами, были рассмотрены Р. А. Ранкиным [71] в 1966 г. Он получил следующий результат.

Теорема 11.2.2 Пусть G является конечной группой, порожденной двумя элементами α, β такими, что $(\alpha\beta)^2 = e$. Тогда граф Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, \{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\})$ имеет гамильтонов цикл.

Доказательство. Мы используем то же самое индукционное предположение, что и в теореме 11.2.1. Кроме этого, нам понадобится некоторое дополнительное условие.

Пусть $H = \langle \beta \rangle$, $X_1 = H$ и предположим, что $\vartheta_\alpha(X_i) = \vartheta_{\alpha^{-1}}(X_i) = \emptyset$. Мы также предположим по индукции, что в графе Γ имеется ориентированный гамильтонов цикл C_i на множестве X_i , который содержит только метки β и α^{-1} . Будем называть это предположение *условием на метки*.

Базисом индукции является условие $\vartheta_\alpha(X_1) = \vartheta_{\alpha^{-1}}(X_1) = \emptyset$.

В качестве шага индукции рассмотрим элемент $y = x\alpha \in \vartheta_\alpha(X_i) \setminus X_i$. Заметим, что ребро, ориентированное к $x \in X_i$ в цикле C_i , не может иметь ни метку α^{-1} (иначе имеем ребро $\{y, x\}$, в то время как $y \notin X_i$), ни метки α или β^{-1} (по условию на метки). Следовательно, это ребро должно иметь метку β , а ребро $\{x\beta^{-1}, x\} \in C_i$.

Теперь рассмотрим цикл R на yH с метками β на всех ребрах и заметим, что

$$x \rightarrow x\alpha = y \rightarrow x\alpha\beta = y\beta \rightarrow x\beta^{-1} = x\alpha\beta\alpha \rightarrow x$$

является квадратом, который соединяет R и C_i . Формально запишем это как:

$$C_{i+1} = C_i \cup R + \{x, y\} + \{y\beta, x\beta^{-1}\} - \{x\beta^{-1}, x\} - \{y, y\beta\},$$

и заметим, что C_i является гамильтоновым циклом на $X_{i+1} = X_i \cup yH$.

Пусть в цикле C_{i+1} наследуется ориентация ребер цикла C_i . Убедимся в том, что цикл C_{i+1} удовлетворяет условию на метки в соответствии с этой ориентацией.

В самом деле, если $y = x\alpha^{-1} \notin X_i$, то рассмотрим ребро, выходящее из $x \in X_i$ аналогично тому, как описано выше. Если $\vartheta_\alpha(X_i) = \vartheta_{\alpha^{-1}}(X_i) = \emptyset$, то имеем $X_i = G$, что завершает доказательство. \square

Обе теоремы изложены в соответствии с доказательством, предложенным И. Паком и Р. Радоичичем [67].

11.3 Гамильтоновость графов Кэли на симметрической группе

Имеется несколько результатов по гамильтоновости графов Кэли на симметрической группе. В частности, отметим два результата для графов Кэли, порожденных транспозициями. Первый был получен независимо В. Л. Компельмахером и В. А. Лисковцом в 1975 г. [87] и П. Слейтером в 1978 г. [79]. Они задавались следующим вопросом:

«... можно ли все перестановки заданной длины расположить так, чтобы каждая следующая получалась из предыдущей одной транспозицией из произвольного фиксированного базиса?».

Таким образом, этот вопрос можно рассматривать как вопрос о существовании гамильтонова цикла в графе Кэли, порождающее множество которого представлено множеством транспозиций. Ответом на этот вопрос является следующий результат.

Теорема 11.3.1 [79, 87] *Для любого порождающего множества S , представленного транспозициями, граф Кэли $\text{Cay}(\text{Sym}_n, S)$ является гамильтоновым.*

Любой граф Кэли на симметрической группе, порожденный транспозициями, является двудольным, поскольку любая транспозиция переводит четную перестановку в нечетную, и наоборот. Следовательно, в одной доле будут все четные перестановки, а в другой - все нечетные. В 1982 г. результат, полученный В. Л. Компельмахером и В. А. Лисковцом, был обобщен в следующем виде.

Теорема 11.3.2 [80] *Если порождающее множество S группы Sym_n состоит из транспозиций, то граф Кэли $\text{Cay}(\text{Sym}_n, S)$ содержит гамильтонов путь между любыми двумя вершинами разных долей графа.*

Таким образом, графы Кэли на симметрической группе относительно любых порождающих множеств, представленных транспозициями, всегда гамильтоновы. Независимо в теории межкоммуникационных сетей

в 1991 г. показано, что гамильтоновыми являются Star граф S_n [48] и Bubble-sort граф BS_n [49]. В последней работе также показана гамильтоновость Рапсаке графа P_n . Все эти результаты объединяет тот факт, что данные графы имеют иерархическую структуру.

В следующей главе описывается принцип иерархического строения Рапсаке графа и приводятся два способа построения в нем гамильтонова цикла, а также показывается как эта задача связана с построением обобщенного кода Грея в Рапсаке графе.

11.4 Упражнения

1. Найти гамильтонов цикл в графе Кэли $\Gamma = Cay(\mathbb{Z}_{12}, \{3, 4, 8, 9\})$.
2. Проверить гамильтоновость графов тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Какой из этих граф не является графом Кэли?
3. Найти гамильтонов цикл в Bubble-sort графе BS_4 , представленном на рис. 17.
4. Построить гамильтонов путь в графе Коксетера. Убедиться, что гамильтонов цикл в графе не существует.
5. Построить гамильтонов цикл в графе Холта.
6. Убедиться, что граф Шрикханде является гамильтоновым.
7. Имеется ли среди графов Мура граф, не содержащий гамильтонов цикл? Привести пример.
8. Какой частный случай графов Хэмминга является примером семейства гамильтоновых графов?
9. Убедиться, что граф Джонсона $J(5, 2) \cong T(5)$ содержит гамильтонов цикл. Всякий ли треугольный граф $T(n)$ является гамильтоновым?
10. Среди графов Кнезера $K(n, k)$ существуют гамильтоновы графы? Привести простейшие примеры, указать параметры n и k , при которых граф Кнезера является гамильтоновым.

Глава 12

Коды Грея

В этой главе продолжим говорить о гамильтоновости графов Кэли с позиции существования в них кодов Грея. На примере двух семейств графов Кэли покажем, как строятся коды Грея и обобщенные коды Грея.

12.1 Гамильтоновость гиперкуба и код Грея

Гамильтоновы пути и гамильтоновы циклы играют важную роль в теории компьютерных сетей [59, 41] и в комбинаторном дизайне [61, 27]. Гамильтоновость гиперкуба связана с отражённым кодом Грея (см. [89]).

Гиперкуб H_n является частным случаем графа Хэмминга, рассмотренного в разделе 7.1. Вершинами гиперкуба являются 2^n векторов длины n . Две вершины гиперкуба смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им векторы различаются ровно в одной позиции. Гиперкуб является n -регулярным графом диаметра n , и его можно также представить как декартово произведение n полных графов K_2 .

Гиперкуб H_n является графом Кэли на группе \mathbb{Z}_2^n с порождающим множеством

$$S = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-1}), 0 \leq i \leq n-1\},$$

где $|S| = n$.

Гамильтоновость гиперкуба H_n легко показывается с применением n -разрядного двоичного кода Грея, который определяется как упорядоченная последовательность из 2^n n -разрядных двоичных кодовых слов

(бинарных векторов), каждое из которых отличается от соседнего в одном разряде. В общем случае существует много различных кодов Грея в гиперкубе. Но чаще всего под термином «код Грея» понимается отражённый двоичный код Грея, схема построения которого приводится ниже.

Алгоритм построения отраженного двоичного кода Грея основан на рекурсии и состоит из двух этапов.

1. Фиксируем нулевое значение старшей компоненты слова (вектора) и перебираем все наборы длины $n - 1$ для оставшихся компонент.

2. Меняем значение старшей компоненты с 0 на 1. Перебираем наборы длины $n - 1$ в обратном порядке.

Иными словами, код Грея представляет собой последовательность 2^n векторов, записанных таким образом, что вторая его половина эквивалентна первой половине, записанной в обратном порядке, за исключением старшей компоненты, в которой 0 заменяется на 1. Если разделить каждую половинку еще раз пополам, то это свойство будет сохраняться для каждой половины половинок и т. д.

Таким образом, при $n = 2$ единственный код Грея имеет вид:

$$00\ 01 \mid 11\ 10.$$

При $n = 3$ код Грея строится на основе алгоритма следующим образом: его первая половина получается из кода Грея при $n = 2$ присыванием 0 в старшей компоненте, а его вторая половина строится в соответствии со вторым пунктом алгоритма:

$$000\ 001\ 011\ 010 \mid 110\ 111\ 101\ 100.$$

При $n = 4$ код Грея имеет вид:

$$0000\ 0001\ 0011\ 0010\ 0110\ 0111\ 0101\ 0100 \mid 1100\ 1101\ 1111\ 1110\ 1010\ 1011\ 1001\ 1000.$$

Результатом работы алгоритма является последовательность векторов, задающих множество вершин гиперкуба. При этом, каждый вектор в коде Грея отличается от соседнего в одном разряде, значит, эта последовательность соответствует гамильтонову пути в гиперкубе. Поскольку

первый и последний векторы также отличаются ровно в одной позиции, то код Грея описывает гамильтонов цикл в гиперкубе. На рис. 10 представлены гиперкубы H_2, H_3, H_4 и их гамильтоновы циклы.

Очевидно, что при построении отражённого двоичного кода Грея важную роль играет иерархическое строение гиперкуба. Такое строение свойственно Рапсаке графу, для которого найдены обобщённые коды Грея.

12.2 Иерархическое строение Рапсаке графа

Напомним, что Рапсаке граф P_n определяется на симметрической группе Sym_n перестановок $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n]$, где $\pi_i = \pi(i)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, с порождающим множеством

$$PR = \{r_i \in Sym_n, 2 \leq i \leq n\}$$

всех префикс-реверсалов r_i , меняющих порядок элементов внутри интервала $[1, i]$, $2 \leq i \leq n$, перестановки π при умножении на нее справа: $[\pi_1 \dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_n] r_i = [\pi_i \dots \pi_1 \pi_{i+1} \dots \pi_n]$.

Из теоремы 6.3.1 следует, что рапсаке граф P_n является вершинно-транзитивным $(n - 1)$ -регулярным неориентированным графом без петель и кратных ребер порядка $n!$. Некоторые другие его свойства представлены в разделе 8.5.

Граф P_n , $n \geq 3$, обладает иерархической структурой, а именно: он состоит из n копий $P_{n-1}(i)$, $1 \leq i \leq n$, в каждой из которых множество вершин представлено как:

$$V_i = \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i], \text{ где } \pi_k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, 1 \leq k \leq n - 1\},$$

$|V_i| = (n - 1)!$, а множество ребер представлено как:

$$E_i = \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i], [\pi_1 \dots \pi_{n-1} i] r_j, 2 \leq j \leq n - 1\},$$

$$|E_i| = \frac{(n-1)!(n-2)}{2}.$$

Любые две копии $P_{n-1}(i), P_{n-1}(j)$, $i \neq j$, соединяются $(n - 2)!$ ребрами вида $\{[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j], [j \pi_{n-1} \dots \pi_2 i]\}$, где

$$[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j] r_n = [j \pi_{n-1} \dots \pi_2 i].$$

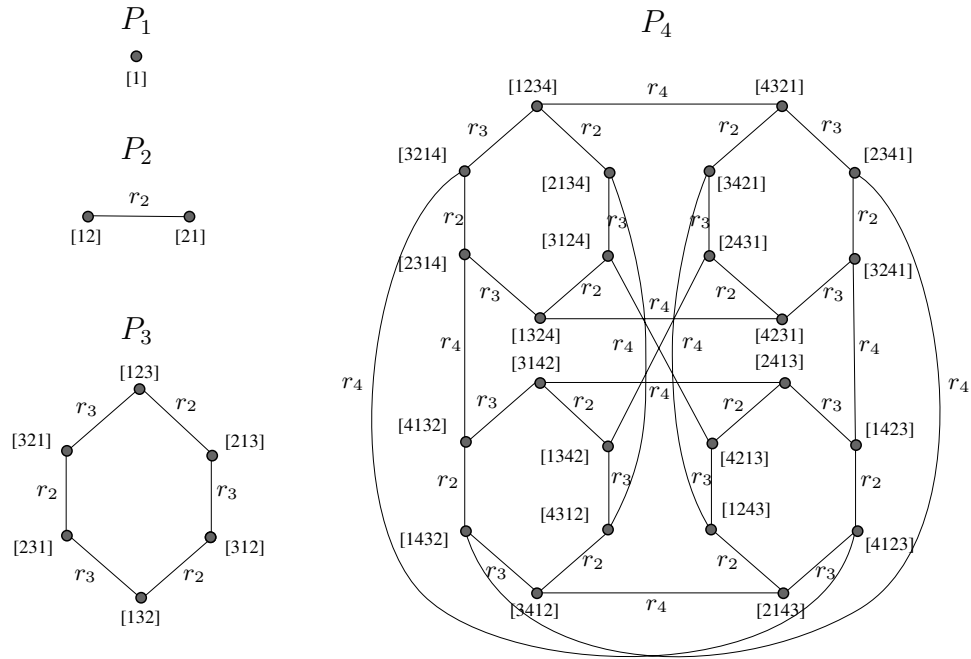


Рис. 19. Иерархическое строение Рансаке графов P_2 , P_3 и P_4

Префикс-реверсалы r_j , $2 \leq j \leq n-1$, определяют внутренние ребра в каждой из n копий $P_{n-1}(i)$, $1 \leq i \leq n$, а префикс-реверсал r_n определяет внешние ребра между копиями. Копии $P_{n-1}(i)$ будем также называть $(n-1)$ -копиями.

Всего в графе имеется $|E_{ext}| = \frac{n!}{2}$ внешних ребер и $|E_{int}| = n \frac{(n-1)!(n-2)}{2} = \frac{n!(n-2)}{2}$ внутренних ребер. Число вершин увеличивается при переходе от P_{n-1} к P_n в n раз, число ребер увеличивается в $\frac{n(n-1)}{n-2}$ раз.

На рис. 19 показано иерархическое строение графов P_2 , P_3 и P_4 . Граф P_2 содержит две копии графа P_1 и ребро между ними. Нетрудно также заметить, что граф P_3 содержит три копии графа P_2 и три внешних ребра между копиями, а граф P_4 содержит четыре копии графа P_3 и двенадцать внешних ребер между копиями.

12.3 Гамильтоновость Рансаке графа

В этом разделе дается доказательство гамильтоновости Рансаке графа на основе его иерархического представления [51, 77].

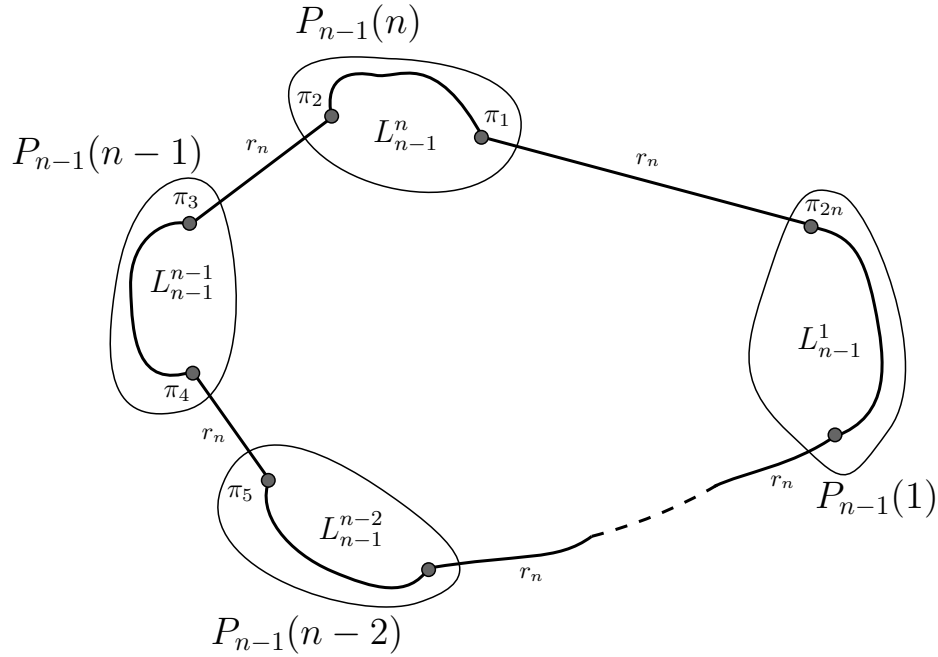


Рис. 20. Построение гамильтонова цикла в Рапсаке графе

Теорема 12.3.1 Рапсаке граф P_n , $n \geq 3$, содержит гамильтонов цикл.

Доказательство. Проведем индукцией по k , где под k будем понимать размерность графа P_k , $k \geq 3$. При $k = 3$ граф P_k представляет собой цикл длины 6. Очевидно, что он является гамильтоновым и может быть представлен следующим образом: $[123] \xrightarrow{r_2} [213] \xrightarrow{r_3} [312] \xrightarrow{r_2} [132] \xrightarrow{r_3} [231] \xrightarrow{r_2} [321] \xrightarrow{r_3} [123]$, при этом удаление последнего ребра в этом гамильтоновом цикле даст нам гамильтонов путь.

Предположим, что при $k = n - 1$ утверждение теоремы верно. Докажем, что оно верно и при $k = n$. Построим гамильтонов цикл H_n , используя иерархическое строение графа. Начнем с вершины

$$\pi_1 = [12 \dots (n - 1) n] \in P_{n-1}(n).$$

По индуктивному предположению, в $P_{n-1}(n)$ существует гамильтонов цикл H_{n-1}^n . Удалим из него ребро $\{[12 \dots (n - 1) n], [(n - 1) \dots 2 1 n]\}$, принадлежащее H_{n-1}^n по построению, и обозначим получившийся гамильтонов путь через L_{n-1}^n , где верхний индекс n обозначает номер копии (см. рис. 20). Вершина $\pi_2 = [(n - 1) \dots 2 1 n]$, принадлежащая копии $P_{n-1}(n)$,

соединена внешним ребром с вершиной $\pi_3 = [n\ 1\ 2\ \dots\ (n-2)\ (n-1)]$, принадлежащей копии $P_{n-1}(n-1)$. По индуктивному предположению в данной $(n-1)$ -копии также существует гамильтонов цикл. Удалим из него ребро $\{[n\ 1\ 2\ \dots\ (n-2)\ (n-1)], [(n-2)\ \dots\ 1\ n\ (n-1)]\}$ и обозначим получившийся гамильтонов путь через L_{n-1}^{n-1} .

Вершина $\pi_4 = [(n-2)\ \dots\ 1\ n\ (n-1)]$ соединена внешним ребром с вершиной $\pi_5 = [(n-1)\ n\ 1\ \dots\ (n-3)\ (n-2)]$ копии $P_{n-1}(n-2)$, в котором также имеется, по предположению, гамильтонов цикл. Используя рассуждения, приведенные выше, в этой копии, а также во всех остальных копиях $P_{n-1}(j)$, $1 \leq j \leq n-2$, получим пути $L_{n-1}^{n-2}, \dots, L_{n-1}^1$, соединенные между собой внешними ребрами. Последний путь L_{n-1}^1 заканчивается вершиной $\pi_{2n} = [n\ (n-1)\ \dots\ 2\ 1]$, имеющей внешнее ребро с вершиной π_1 графа $P_{n-1}(n)$, с которой мы начинали построение. Таким образом, объединяя полученные пути $L_{n-1}^n, L_{n-1}^{n-1}, \dots, L_{n-1}^1$ и внешние ребра между ними, получим гамильтонов цикл H_n , что завершает доказательство теоремы. \square

12.4 Порождающий алгоритм Закса

Еще один способ построения гамильтонова цикла был предложен в 1984 г. Ш. Заксом [85] на основе порождения перестановок в некотором заданном порядке. В этом алгоритме каждая последующая перестановка порождается суффикс-реверсалом предыдущей перестановки. С точки зрения симметрии, это то же самое, что рассматривать префикс-реверсалы, используемые в определении Рапсаке графа.

Алгоритм начинает свою работу с тождественной перестановки на n элементах $I_n = [1\ 2\ \dots\ n]$. Каждый шаг алгоритма определяется некоторым суффикс-реверсалом. Последовательность ζ_n размеров этих суффикс-реверсалов определяется рекурсивным образом:

$$\begin{aligned}\zeta_2 &= 2 \\ \zeta_n &= (\zeta_{n-1}\ n)^{n-1}\ \zeta_{n-1},\ n > 2.\end{aligned}$$

Например, если $n = 2$, то $\zeta_2 = 2$, и мы получаем:

$$[\underline{12}] \quad [21]$$

Если $n = 3$, то $\zeta_3 = 23232$, и мы имеем:

$$\begin{array}{ccc} [\underline{123}] & [231] & [312] \\ [\underline{132}] & [213] & [321] \end{array}$$

Если $n = 4$, тогда $\zeta_4 = 23232423232423232423232$, и имеем:

$$\begin{array}{cccc} [\underline{1234}] & [2341] & [3412] & [4123] \\ [\underline{1243}] & [2314] & [3421] & [4132] \\ [\underline{1342}] & [2413] & [3124] & [4231] \\ [\underline{1324}] & [2431] & [3142] & [4213] \\ [\underline{1423}] & [2134] & [3241] & [4312] \\ [\underline{1432}] & [2143] & [3214] & [4321] \end{array}$$

Обоснованность порождающего алгоритма Закса доказывается индукцией по n и состоит в том, что, начиная с перестановки $[12 \dots n]$ и применяя последовательность ζ_n суффикс-реверсалов, мы породим все $n!$ перестановок, последней из которых будет перестановка $[n n - 1 \dots 1]$.

Очевидно, что наше предположение выполняется при $n = 2$. Предположим, что оно верно для $n - 1$, и докажем, что оно также выполняется для n . Заметим, что последовательность ζ_n начинается с ζ_{n-1} , следовательно, из тождественной перестановки $[12 \dots n]$ сначала породим $(n - 1)!$ перестановок, начинающихся с 1. По нашему индуктивному предположению, последней будет перестановка $[1n n - 1 \dots 2]$. Затем породим перестановку $[23 \dots n 1]$, поскольку следующим элементом в ζ_n является n . Все последующие перестановки, порожденные таким образом, будут начинаться с 2. Продолжая аналогичным образом, породим все перестановки, начинающиеся с $3 \dots n$.

Более того, поскольку первая перестановка, начинающаяся с 2 (это перестановка $[23 \dots n 1]$), получается из первой перестановки, начинающейся с 1 (это перестановка $[12 \dots n]$), увеличением каждого элемента в ней на 1 (n переходит в 1), и поскольку перестановки, начинающиеся с 1 и 2, порождаются последовательностью ζ_{n-1} , следовательно, последняя перестановка, начинающаяся с 2, получается из $[1n n-1 \dots 2]$ (последняя перестановка, начинающаяся с 1) таким же образом, а именно, это есть перестановка $[21 n \dots 3]$. Продолжая аналогичным образом, легко показать, что первой перестановкой, начинающейся с i , $1 < i \leq n$, является перестановка $[i i+1 \dots n 12 \dots i-1]$, а последней является перестановка $[i i-1 \dots 1 n n-1 \dots i+1]$ (для $i = n$ это перестановка $[n n-1 \dots 1]$). \square

12.5 Префикс-реверсальный код Грея

Порождающий алгоритм Закса строит не только гамильтонов цикл в Рапсаке графе, но и дает обобщенный код Грея, который в данном случае называется *префикс-реверсальный код Грея*.

Такие коды Грея впервые были определены и рассмотрены в 2013 году А. Вильямсом и Дж. Савадой [83, 84]. Они предложили записывать построение префикс-реверсального кода Грея в виде жадной последовательности:

$$GR_Z = \{r_2, r_3, r_4, \dots, r_n\},$$

в предположении, что начиная с тождественной перестановки последовательно применяется тот крайний левый префикс-реверсал, который дает новую перестановку. Именно так работает алгоритм Закса.

Они также показали, что существует другая жадная последовательность:

$$GR_W = \{r_n, r_{n-1}, \dots, r_3, r_2\},$$

позволяющая построить префикс-реверсальный код Грея, отличный от кода, порождаемого алгоритмом Закса.

В 2016 году Е. В. Константинова и А. Н. Медведев [55] доказали, что имеется еще две жадные последовательности, отличные от приведенных

выше, которые позволяют получать префикс-реферсальные коды Грея. Вопрос описания всех возможных жадных последовательностей для порождения префикс-реверсальных кодов Грея остается открытым.

В целом, обзор по обобщенным комбинаторным кодам Грея, в том числе, возникающих на графах Кэли, можно найти в работе К. Сэвидж [75].

12.6 Упражнения

1. Построить код Грея в гиперкубе H_3 , отличный от отраженного двоичного кода Грея. Можно ли обобщить полученный код Грея для H_n при $n > 3$? Опишите алгоритм построения такого кода в общем случае.
2. Используя иерархическое строение Рапсаке графа P_5 , найдите мощность множества вершин индуцированного подграфа P_4 , а также число внешних ребер, связывающих вершины любых двух копий P_4 в P_5 . Сколько копий P_4 содержится в P_5 ? Сколько ребер в каждой из копий P_4 ? Сколько всего внешних ребер в графе P_5 ?
3. Построить гамильтонов цикл в Рапсаке графе P_4 , изображенном на рис. 19. Можно ли в полученном гамильтоновом цикле выделить пути длины пять, принадлежащие четырем индуцированным подграфам P_3 ? Выпишите последовательность перестановок, соответствующую найденному гамильтонову циклу. Является ли полученная последовательность префикс-реверсальным кодом Грея?
4. Записать в явном виде последовательность ζ_5 размеров суффикс-реверсальных, задаваемых в порождающем алгоритме Закса.
5. В явном виде записать префикс-реверсальные коды Грея для Рапсаке графа P_4 , полученные на основе жадных последовательностей GR_Z и GR_W из раздела 12.5.

Глава 13

Спектр Star графа

В этой главе на примере Star графе, введенного в разделе 8.3, показывается связь между спектральной теорией графов и теорией представлений конечных групп.

13.1 Целочисленные графы

Граф называется *целочисленным*, если все собственные значения его матрицы смежности являются целыми числами. Например, полный граф на n вершинах является целочисленным, поскольку его спектр представлен как $\text{Spec}(K_n) = [(-1)^{n-1}, (n-1)^1]$ для любого $n > 1$. При $n = 1$ спектр графа K_1 имеет единственное собственное значение 0 с кратностью 1. Целочисленным является граф Петерсена P со спектром $\text{Spec}(P) = [(-2)^4, 1^5, 3^1]$ (см. раздел 3.4).

В 1974 году Ф. Харари и А. Швенк [38] впервые поставили задачу характеристики целочисленных графов. В 1975 году Д. Цветкович [25] доказал, что множество связных k -регулярных целочисленных графов конечно для любого $k > 1$. В частности, среди 2-регулярных графов только циклы C_3, C_4 и C_6 являются целочисленными графами со спектрами $\text{Spec}(C_3) = [(-1)^2, 2]$, $\text{Spec}(C_4) = [\pm 2^1, 0^2]$ и $\text{Spec}(C_6) = [\pm 1^2, \pm 2^1]$. Среди 3-регулярных графов имеется только 13 неизоморфных целочисленных связных графов [19, 78]. Классификация k -регулярных графов при $k > 3$ является открытым вопросом.

Число $\#$ связных целочисленных графов с заданным числом вершин

n при $n \leq 12$ представлено в таблице:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#	1	1	2	3	6	7	22	24	83	236	325

13.2 Целочисленность Star графа

Целочисленность Star графа была установлена в 2012 году [21, 57]. Более того, Г. Шашью и В. Феррей показали [21], что целочисленность графа вытекает из теории представления симметрической группы и связана с элементами Юциса-Мёрфи в комплексной алгебре симметрической группы. Их основной результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 13.2.1 *Спектр Star графа S_n является целочисленным, а именно, он содержит все целые числа в интервале от $-(n-1)$ до $n-1$ (за исключением случая, когда $n \leq 3$, тогда 0 не является собственным значением S_n), при этом для любого целого t , $1 \leq t \leq n$, кратность собственного значения $n-t$ задается формулой:*

$$\text{mul}(n-t) = \sum_{\lambda \vdash n} \dim(V_\lambda) I_\lambda(n-t), \quad (13.1)$$

где размерность $\dim(V_\lambda)$ неприводимого представления V совпадает с числом различных стандартных таблиц Юнга формы λ , а $I_\lambda(n-t)$ есть число стандартных таблиц Юнга формы λ , удовлетворяющих условию $c(n) = n-t$.

Основной целью этой главы будет разобраться в том, как возникает формула (13.1). Для этого нам понадобится изучить связь перестановок с таблицами Юнга. Затем показать, какое отношение имеют таблицы Юнга к представлению симметрической группы, а также как это представление связано с элементами Юциса-Мёрфи. И, наконец, как элементы Юциса-Мёрфи связаны со спектром Star графа.

13.3 Перестановки и классы сопряженности

Циклической перестановкой (циклом) $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ называют перестановку, переводящую i_1 в i_2 , i_2 в i_3, \dots, i_k в i_1 . Любая перестановка может быть разложена в произведение непересекающихся циклов, причем единственным образом с точностью до порядка следования циклов в произведении. Например, перестановка $\pi = [1\ 3\ 2\ 4\ 5]$ раскладывается в произведение $\pi = (1)(23)(4)(5)$ одного нетривиального цикла длины два, а также имеет три фиксированных элемента, которые в циклической записи перестановки обычно принято опускать. Таким образом, циклическая запись $\pi = (23)$ соответствует перестановке $\pi = [1\ 3\ 2\ 4\ 5]$.

Любая перестановка также раскладывается в произведение транспозиций. Заметим, что в отличие от разложения на независимые циклы, разложение в произведение транспозиций не является единственным. Например, перестановку $\pi = [2\ 3\ 4\ 5\ 1] = (12345)$ можно записать в виде произведения следующих транспозиций:

$$\pi = [2\ 3\ 4\ 5\ 1] = (12345) = (12)(13)(14)(15) = (23)(24)(25)(21).$$

Разложение перестановки в произведение непересекающихся циклов определяет цикловой тип перестановки - важную характеристику, задающую перестановку с точностью до сопряженности.

Два элемента π и τ группы Sym_n называются *сопряженными*, если существует другой элемент $\sigma \in \text{Sym}_n$ для которого выполняется следующее соотношение:

$$\pi = \sigma \tau \sigma^{-1}.$$

Сопряженность является отношением эквивалентности: симметрическая группа разбивается на классы эквивалентности так, что каждый элемент группы принадлежит в точности одному классу сопряженности. При этом, два класса сопряженности совпадают тогда и только тогда, когда между элементами этих классов имеется сопряжение, и не пересекаются в противном случае.

Факт 13.3.1 *Две перестановки сопряжены в симметрической группе*

тогда и только тогда, когда их разложения в произведение независимых циклов содержат одинаковое число циклов длины k для любого k .

Приведем два примера: классов сопряженности симметрической группы степени три и степени четыре.

Пример А. Симметрическая группа степени 3 содержит шесть перестановок, которые разбиваются на три класса сопряженности:

1 класс: порядок элементов не меняется (тождественная перестановка):

$$I_3 = (1)(2)(3)$$

2 класс: перестановки 2-х элементов (3 транспозиции):

$$(12), (23), (13)$$

3 класс: перестановки 3-х элементов (2 перестановки):

$$(231), (321)$$

Пример В. Симметрическая группа степени 4 содержит 24 перестановки, которые разбиваются на пять классов сопряженности:

1 класс: порядок элементов не меняется (тождественная перестановка):

$$I_4 = (1)(2)(3)(4)$$

2 класс: перестановки 2-х элементов (6 транспозиций):

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34)$$

3 класс: перестановки 3-х элементов (8 перестановок):

$$(134), (231), (234), (241), (321), (421), (432), (431)$$

4 класс: перестановки 4-х элементов (6 перестановок):

$$(1234), (2431), (3421), (3241), (4321), (4231)$$

5 класс: попарные перестановки (3 перестановки):

$$(12)(34), (14)(23), (13)(24)$$

13.4 Разбиения и таблицы Юнга

Число классов сопряженности в симметрической группе степени n равно количеству разбиений положительного числа n и мы рассматриваем цикловой тип перестановки как разбиение положительного числа n .

Разбиением положительного целого числа n называется последовательность положительных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, $l \leq n$, таких что: 1) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$; 2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = n$.

Обозначим $\lambda \vdash n$, если λ является разбиением числа n .

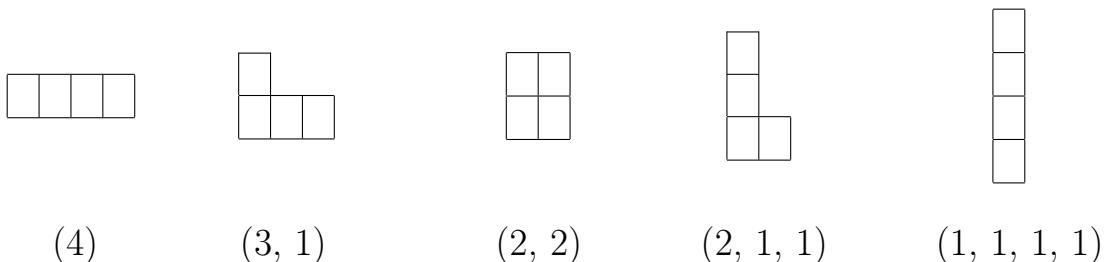
Если перестановка π раскладывается в произведение независимых циклов, длины которых равны $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ и формально учитываются циклы длины один так, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = n$, то разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, $l \leq n$, называется *цикловым типом перестановки* π . Например, для $n = 4$ имеется 5 разбиений:

- (4) \rightarrow (1 2 3 4) \rightarrow 4 класс
- (3, 1) \rightarrow (1 2 3)(4) \rightarrow 3 класс
- (2, 2) \rightarrow (1 2)(3 4) \rightarrow 5 класс
- (2, 1, 1) \rightarrow (1 2)(3)(4) \rightarrow 2 класс
- (1, 1, 1, 1) \rightarrow (1)(2)(3)(4) \rightarrow 1 класс

Соответствующие этим разбиениям цикловые типы перестановок, а также классы сопряженности представлены в примере В.

Разбиения представляются диаграммами Юнга. Мы будем использовать французскую систему обозначений для диаграмм Юнга. Также известна зеркально отраженная относительно горизонтали английская система обозначений.

Диаграммой Юнга называется конечное множество n клеток, выровненных по левому краю, в котором длины строк, считая снизу, образуют невозрастающую последовательность (каждая вышестоящая строка такой же длины как предыдущая, или короче). Диаграмма Юнга $[\lambda]$, связанная с разбиением $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, имеет в точности l строк и λ_i клеток в i -ой строке. Ниже приведены диаграммы Юнга, соответствующие разбиениям числа $n = 4$.



Пусть λ является разбиением числа n . Тогда *таблицей Юнга формы λ* называется заполнение клеток диаграммы Юнга элементами $1, 2, \dots, n$, где каждое число встречается ровно один раз. Определим множество $[\lambda] = \{(i, j) : 1 \leq j \leq \lambda_i, 1 \leq i \leq l\}$, где i и j соответствуют строке и столбцу, в которых находится клетка с нумерацией снизу вверх и слева направо. Таким образом, каждая клетка $(i, j) \in [\lambda]$, $1 \leq j \leq \lambda_i$, $1 \leq i \leq l$, содержит уникальное целое число $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Назовем параметр

$$c(m) = i - j \quad (13.2)$$

индикатором числа m в таблице Юнга. *Стандартной таблицей Юнга* называется таблица Юнга, в которой числа в клетках стоят в возрастающем порядке снизу вверх и слева направо.

Например, для $n = 5$ имеется 7 разбиений следующего вида: (5) , $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$. Все стандартные таблицы Юнга разбиения $(3, 2)$ представлены ниже:

4	5		3	5		3	4	
1	2	3	1	2	4	1	2	5
2			2			2		
1	3	5	1	3	4	1	3	4

Посчитаем по формуле (13.2) индикаторы чисел, размещенных в каждой из ячеек первой стандартной таблицы Юнга. Имеем: $c(5) = 2 - 2 = 0$, $c(4) = 2 - 1 = 1$, $c(3) = 1 - 3 = -2$, $c(2) = 1 - 2 = -1$, $c(1) = 1 - 1 = 0$.

В дальнейшем, нас будет интересовать индикатор числа n .

13.5 Представление симметрической группы

В теории представлений конечных групп рассматриваются конкретные реализации аксиоматических систем абстрактной алгебры. Эта теория берет свое начало в изучении групп перестановок и матричных алгебр.

Теория представлений анализирует группу на основе представления ее элементов в терминах обратимых матриц [90]. Приведем основные понятия этой теории, используемые в формуле (13.1).

Группа обратимых матриц с матричным умножением в качестве группового умножения называется *матричной группой*. В частности, всякая перестановка π может быть представлена в виде квадратичной бинарной матрицы $P(\pi) = (p_{i,j})_{n \times n}$, в каждой строке и каждом столбце которой находится лишь одна единица, а именно:

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \pi_i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Например, в соответствии с этой формулой, матричные представления элементов группы Sym_3 имеют вид:

$$\begin{aligned} P(I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & P(12) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & P(13) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P(23) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & P(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & P(132) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В общем случае, матрица размерности $(n \times n)$ представляет собой линейное преобразование в векторном пространстве V размерности n . Следовательно, матричной группе соответствует группа линейных обратимых преобразований в пространстве V .

Пусть G есть конечная группа. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V на поле комплексных чисел \mathbb{C} и множество $GL(V)$ всех обратимых линейных преобразований V на себя.

Представлением группы G на векторном пространстве V называется гомоморфизм $\rho : G \rightarrow GL(V)$, а V называется пространством представления размерности $\dim(V)$. Представление ρ называется *неприводимым*, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

Два представления $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ и $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ на векторных пространствах V_1 и V_2 называются *эквивалентными*, если существует

изоморфизм векторных пространств $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ такой, что $\varphi\rho_2(g) = \rho_1(g)\varphi$ для всех $g \in G$.

Рассмотрим векторное пространство V размерности $\dim(V) = |G|$ и зафиксируем базис этого пространства. Тогда существует биекция $g \rightarrow e_g$ между элементами группы и элементами базиса. *Регулярное представление* $\rho_{\text{reg}} : G \rightarrow GL(V)$ группы G задается действием элементов группы на базисных векторах по правилу $\rho_{\text{reg}}(g)(e_h) = e_{hg}$.

В частности, n -мерное представление симметрической группы Sym_n получается следующим образом. Если в векторном пространстве V размерности n выбрать некоторый базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, то для каждого элемента $\pi \in \text{Sym}_n$ определим линейное преобразование, переводящее базисный вектор e_i в базисный вектор e_{π_i} , где $i = 1, \dots, n$.

У конечной группы лишь конечное число попарно неэквивалентных неприводимых представлений ρ_1, \dots, ρ_r , а регулярное представление ρ_{reg} раскладывается в прямую сумму:

$$\rho_{\text{reg}} = \underbrace{\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_1}_{\dim(V_1)} \oplus \dots \oplus \underbrace{\rho_r \oplus \dots \oplus \rho_r}_{\dim(V_r)},$$

где V_i является пространством неприводимого представления ρ_i .

Далее рассмотрим представление симметрической группы Sym_n через элементы Юциса-Мёрфи ее групповой алгебры [73].

По определению, групповая алгебра задается как множество конечных формальных сумм. *Групповой алгеброй симметрической группы* $\text{Sym}_n = \{g_1, g_2, \dots, g_n!\}$ является ее регулярное представление:

$$\mathbb{C}[\text{Sym}_n] = \{c_1g_1 + c_2g_2 + \dots + c_n!g_n! : c_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n!\},$$

где \mathbb{C} есть поле комплексных чисел. При этом, регулярное представление симметрической группы выражается следующим образом. Известно, что число неприводимых представлений конечной группы совпадает с числом ее классов сопряженности. Поскольку класс сопряженности любой перестановки определяется ее цикловым типом, то для симметрической группы классы ее сопряженности задаются всевозможными разбиениями числа n . Следовательно, неприводимые представления симметрической группы степени n задаются диаграммами Юнга из n клеток.

Приведем еще один важный результат [73, Предложение 1.10.1]. Пусть имеется разбиение $\lambda \vdash n$, тогда обозначим через V_λ пространство соответствующего неприводимого представления Sym_n .

Факт 13.5.1 По теореме Машке, регулярное представление $\mathbb{C}[\text{Sym}_n]$ симметрической группы Sym_n раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений V_λ следующим образом:

$$\mathbb{C}[\text{Sym}_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \dim(V_\lambda) V_\lambda,$$

где неприводимое представление V_λ содержится в регулярном представлении с кратностью, соответствующей его размерности $\dim(V_\lambda)$.

Кратность $\dim(V_\lambda)$ в регулярном представлении указывает на число представлений, эквивалентных неприводимому представлению V_λ . Связь между размерностью попарно неэквивалентных неприводимых представлений и порядком симметрической группы задается формулой [73]:

$$\sum_{\lambda \vdash n} (\dim(V_\lambda))^2 = |\text{Sym}_n|. \quad (13.3)$$

Элементы Юциса-Мёрфи [47, 66] в групповой алгебре $\mathbb{C}[\text{Sym}_n]$ определяются как сумма транспозиций следующего вида:

$$J_1 \equiv 0, \quad J_2 = (12), \quad J_i = (1i) + (2i) + \dots + (i-1i), \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

где под суммированием транспозиций понимается суммирование соответствующих им матриц. Например, элементы Юциса-Мёрфи в групповой алгебре $\mathbb{C}[\text{Sym}_3]$ имеют вид:

$$J_2 = (12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = (13) + (23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующий факт [47] говорит о том, что действие элементов Юциса-Мёрфи на пространстве V_λ неприводимого представления симметрической группы диагонализуется, а собственные значения имеют комбинаторное описание в терминах стандартных таблиц Юнга.

Факт 13.5.2 Пусть имеется разбиение $\lambda \vdash n$, тогда существует базис v пространства V_λ , задаваемый стандартными таблицами Юнга формы λ такой, что для любого $2 \leq i \leq n$, выполняется:

$$J_i v = c(i)v,$$

где $c(i)$ является индикатором числа i в стандартной таблице Юнга.

Именно этот факт позволяет получить целочисленный спектр Star графа, а также формулу (13.1) для вычисления кратностей собственных значений Star графа.

13.6 Пример

Теорема 13.2.1 дает следующие спектры Star графа S_n при малых значениях n :

$$\begin{aligned} n = 2 &: \{(\pm 1)^1\} \\ n = 3 &: \{(\pm 1)^2, (\pm 2)^1\} \\ n = 4 &: \{0^4, (\pm 1)^3, (\pm 2)^6, (\pm 3)^1\} \\ n = 5 &: \{0^{30}, (\pm 1)^4, (\pm 2)^{28}, (\pm 3)^{12}, (\pm 4)^1\} \\ n = 6 &: \{0^{168}, (\pm 1)^{30}, (\pm 2)^{120}, (\pm 3)^{105}, (\pm 4)^{20}, (\pm 5)^1\} \\ n = 7 &: \{0^{840}, (\pm 1)^{468}, (\pm 2)^{495}, (\pm 3)^{830}, (\pm 4)^{276}, (\pm 5)^{30}, (\pm 6)^1\} \end{aligned}$$

На примере графа S_7 порядка $7! = 5040$ покажем, как по формуле (13.1) получаются кратности собственных значений графа.

1. Для числа 7 имеется 15 разбиений λ : (7), (6, 1), (5, 2), (5, 1, 1), (4, 3), (4, 2, 1), (4, 1, 1, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 1, 1), (1, 2)(3, 4)(5)(6)(7), (2, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).

2. Для каждого из этих разбиений λ , найдем множество всех стандартных таблиц Юнга формы λ . Мощность каждого такого множества совпадает с размерностью неприводимого модуля V_λ . Например, для $\lambda = (7)$

размерность соответствующего неприводимого модуля $\dim(V_\lambda) = 1$, поскольку имеется только одна стандартная таблица Юнга формы (7), а для $\lambda = (4, 2, 1)$ размерность соответствующего неприводимого модуля $\dim(V_\lambda) = 35$, поскольку в этом случае имеется 35 стандартных таблиц Юнга формы (4, 2, 1).

3. Для всех разбиений всего имеется 232 стандартных таблицы Юнга. На рис. 20 представлены диаграммы Юнга с указанием расположения элемента 7. Для каждой такой таблицы подсчитывается число стандартных таблиц Юнга, а также значение числа $s(7)$.

4. Теперь воспользуемся формулой (13.1):

$$\text{mul}(0) = 5 \cdot 14 + 35 \cdot 10 + 35 \cdot 10 + 14 \cdot 5 = 840$$

$$\text{mul}(1) = \text{mul}(-1) = 1 \cdot 6 + 16 \cdot 21 + 9 \cdot 14 = 468$$

$$\text{mul}(2) = \text{mul}(-2) = 15 \cdot 5 + 35 \cdot 9 + 21 \cdot 5 = 495$$

$$\text{mul}(3) = \text{mul}(-3) = 20 \cdot 10 + 35 \cdot 16 + 14 \cdot 5 = 830$$

$$\text{mul}(4) = \text{mul}(-4) = 15 \cdot 10 + 14 \cdot 9 = 276$$

$$\text{mul}(5) = \text{mul}(-5) = 6 \cdot 5 = 30$$

$$\text{mul}(6) = \text{mul}(-6) = 1 \cdot 1 = 1$$

5. Верификация полученных результатов осуществляется по формуле (13.3):

$$\begin{aligned} 1^2 + 6^2 + 14^2 + 15^2 + 14^2 + 35^2 + 20^2 + 21^2 + 35^2 + 21^2 + 15^2 + 14^2 + 14^2 + 6^2 + 1^2 &= \\ &= 5040 = 7! \end{aligned}$$

$$\lambda = (7): \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & 7 \\ \hline \end{array} \cdot 1 = 1$$

$c(7) = -6$

$$\lambda = (6, 1): \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & 7 \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} \cdot 5 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \cdot 1 = 6$$

$c(7) = -5$ $c(7) = 1$

$$\lambda = (5, 2): \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & 7 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \cdot 9 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 7 & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \cdot 5 = 14$$

$c(7) = -4$ $c(7) = 0$

$$\lambda = (5, 1, 1): \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & 7 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \cdot 10 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 7 \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \cdot 5 = 15$$

$c(7) = -4$ $c(7) = 2$

$$\lambda = (4, 3): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 7 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \cdot 5 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 7 & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 9 = 14$$

$c(7) = -3$ $c(7) = -1$

$$\lambda = (4, 2, 1): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 7 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \cdot 16 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 7 & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 10 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 9 = 35$$

$c(7) = -3$ $c(7) = 0$ $c(7) = 2$

$$\lambda = (4, 1, 1, 1): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 7 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \cdot 10 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 10 = 20$$

$c(7) = -3$ $c(7) = 3$

Рис. 20. Диаграммы Юнга разбиений λ числа 7 с указанием его расположения в каждой диаграмме, а также с подсчетом числа стандартных таблиц Юнга и значений числа $c(7)$

$$\lambda = (3, 3, 1): \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & 7 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 16 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 5 = 21$$

$$c(7) = -1 \qquad c(7) = 2$$

$$\lambda = (3, 2, 1, 1): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 16 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & 7 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 10 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & 7 \\ \hline \end{array} \cdot 9 = 35$$

$$c(7) = 3 \qquad c(7) = 0 \qquad c(7) = -2$$

$$\lambda = (3, 2, 2): \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 7 & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 16 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & 7 \\ \hline \end{array} \cdot 5 = 21$$

$$c(7) = 1 \qquad c(7) = -2$$

$$\lambda = (3, 1, 1, 1, 1): \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 10 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & 7 \\ \hline \end{array} \cdot 5 = 15$$

$$c(7) = 4 \qquad c(7) = -2$$

$$\lambda = (2, 2, 2, 1): \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 7 & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 9 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot 5 = 14$$

$$c(7) = 1 \qquad c(7) = 3$$

Рис. 20а. Диаграммы Юнга разбиений λ числа 7 с указанием его расположения в каждой диаграмме, а также с подсчетом числа стандартных таблиц Юнга и значений числа $c(7)$

$\lambda = (2, 2, 1, 1, 1)$:

$\cdot 9 + \cdot 5 = 14$

$c(7) = 4$ $c(7) = 0$

$\lambda = (2, 1, 1, 1, 1, 1)$:

$\cdot 5 + \cdot 1 = 6$

$c(7) = 5$ $c(7) = -1$

$\lambda = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$:

$\cdot 1 = 1$

$c(7) = 6$

Рис. 206. Диаграммы Юнга разбиений λ числа 7 с указанием его расположения в каждой диаграмме, а также с подсчетом числа стандартных таблиц Юнга и значений числа $c(7)$

Литература

- [1] Akers S. B., Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks, *IEEE Trans. Comput*, 1989. Vol. 38 (4). Pp. 555-566.
- [2] Alspach B., Zhang C. Q. Hamilton cycles in cubic Cayley graphs on dihedral groups, *Ars. Combin*, 1989. Vol. 28. Pp. 101-108.
- [3] Asai S., Kounoike Y., Shinano Y., Kaneko K. Computing the diameter of 17-pancake graph using a PC cluster, *LNSC*, 2006. Vol. 4128. Pp. 1114-1124.
- [4] Annexstein F., Baumslag M. On the diameter and bisection size of Cayley graphs, *Math. System Theory*, 1993. Vol. 26. Pp. 271-291.
- [5] Asai S., Kounoike Y., Shinano Y., Kaneko K. Computing the diameter of 17-pancake graph using a PC cluster, *LNSC*, 2006. Vol. 4128. Pp. 1114-1124.
- [6] Aschbacher M. The nonexistence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57, *Journal of Algebra*, 1971. Vol. 19. Pp. 538-540.
- [7] Babai L. Long cycles in vertex-transitive graphs, *J. Graph Theory*, 1979. Vol. 3. Pp. 301-304.
- [8] Babai L. *Automorphism groups, isomorphism, reconstruction*, Handbook of combinatorics (Vol. 2), MIT Press, Cambridge, MA. 1996. Pp. 1447-1540.

- [9] Babai L., Kantor W. M., Lubotzky A. Small diameter Cayley graphs for finite simple groups, *European J. Combin*, 1989. Vol. 10. Pp. 507-522.
- [10] Babai L., Seress Á. On the diameter of Cayley graphs of the symmetric group, *Journal of Comb. Theory Series*, 1988. Vol. 49 (1). Pp. 175-179.
- [11] Babai L., Seress Á. On the diameter of permutation groups, *European J. Combin*, 1992. Vol. 13. Pp. 231-243.
- [12] Banfa V., Pevzner P. Genome rearrangements and sorting by reversals, *SIAM Journal on Computing*, 1996. Vol. 25 (2). Pp. 272-289.
- [13] Bannai E., Ito T. On finite Moore graphs, *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics*, 1973. Vol. 20. Pp. 191-208.
- [14] Biggs N. *Algebraic graph theory*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1993.
- [15] Biggs N. L., Smith D. H. On trivalent graphs, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1971. Vol. 3. Pp. 155-158.
- [16] Björner A., Brenti F. *Combinatorics of Coxeter groups*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 2005.
- [17] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [18] Brouwer A. E., Haemers W. H. *Spectra of graphs*, Springer, New York, 2012.
- [19] Bussemaker F. C., Cvetković D. There are exactly 13 connected cubic integral graphs, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz*, 1976. Vol. 544/576. Pp. 43-48.
- [20] Cameron P. J. *Automorphisms of graphs*, in: *Selected topics in graph theory*, (L. W. Beineke, R. J. Wilson, Eds.), Vol. 2, Academic Press, London, 1983. Pp. 89-127.

- [21] Chapuy G., Feray V. A note on a Cayley graph of Sym_n , arXiv:1202.4976v2, 2012. Pp. 1-3.
- [22] Cayley, A. Desiderata and suggestions: No. 2. The Theory of Groups: Graphical Representation, American Journal of Mathematics, 1878. Vol. 1 (2). Pp. 174-176.
- [23] Cibulka J. On average and highest number of flips in pancake sorting, Theoretical Computer Science, 2011. Vol. 412. Pp. 822-834.
- [24] Curran S. J., Gallian J. A. Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs – a survey, Discrete Mathematics, 1996. Vol. 156. Pp. 1-18.
- [25] Cvetković D. Cubic integral graphs, Univ. Beograd. Publ. Fak. Ser. Mat. Fiz., 1975. Vol. 498/541, Pp. 107-113.
- [26] Damerell R. M. On Moore graphs, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1973. Vol. 74. Pp. 227-236.
- [27] Diaconis P., Holmes S. Grey codes for randomization procedures, Technical Report No. 10, Dept. Statistics, Stanford University, 1994.
- [28] Dweighter H. Elementary problems and solutions (E 2569), Amer. Math. Monthly, 1975. Vol. 82. P. 1010.
- [29] Even S., Goldreich O. The minimum-length generator sequence problem is *NP*-hard, J. Algorithms, 1981. Vol. 2. Pp. 311-313.
- [30] Euler L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, T. VIII, Ad annum MDCCXXXVI, Petropoli, 1741. Pp. 128-140.
- [31] Frucht R. Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe, Compositio Mathematica, 1939. Vol. 6. Pp. 239-250.
- [32] Garey M. R., Johnson D. S. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, SF, 1979.

- [33] Gates W. H., Papadimitriou C. H. Bounds for sorting by prefix-reversal, Discrete Mathematics, 1979. Vol. 27. Pp. 47-57.
- [34] Godsil C. D. More odd graph theory, Discrete Mathematics, 1980. Vol. 32. Pp. 205-207.
- [35] Gould R. J. Updating the hamiltonian problem – a survey, J. Graph Theory, 1991. Vol. 15 (2). Pp. 121-157.
- [36] Györi E., Turán G. Stack of pancakes, Studia Sci. Math. Hungar, 1978. Vol. 13. Pp. 133-137.
- [37] God's Number is 20. URL: <http://www.cube20.org/>
- [38] Harary F., Schwenk A. J. Which graphs have integral spectra? Graphs and Combinatorics, 1974. Vol. 390. Pp. 45-51.
- [39] Heydari M. H., Sudborough I. H. On sorting by prefix reversals and the diameter of pancake networks, LNCS, 1993. Vol. 678. Pp. 218-227.
- [40] Heydari M. H., Sudborough I. H. On the diameter of the pancake network, Journal of Algorithms, 1997. Vol. 25. Pp. 67-94.
- [41] Heydemann M.-C. *Cayley graphs as interconnection networks*, in: Graph symmetry: algebraic methods and applications, (G. Hahn, G. Sabidussi, Eds.), Kluwer, Amsterdam, 1997.
- [42] Higman D. G. Finite permutation groups of rank 3, Math. Zeitschr, 1964. Vol. 86. Pp. 142-156.
- [43] Higman D. G. Primitive rank 3 groups with a prime subdegree, Math. Zeitschr, 1966, Vol. 91. Pp. 70-89.
- [44] Hoffman A. J. Singleton R. R. Moore graphs with diameter 2 and 3, IBM Journal of Research and Development, 1960. Vol. 5 (4). Pp. 497-504.
- [45] Holt D. F. A graph which is edge-transitive but not arc-transitive, J. Graph Theory, 1981. Vol. 5. Pp. 201-204.

- [46] Huppert B. *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin, 1967.
- [47] Jucys A. Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring, *Reports Math. Phys*, 1974. Vol. 5. Pp. 107-112.
- [48] Jwo J. S., Lakshmivarahan S., Dhall S. K. Embedding of cycles and grids in star graphs, *J. Circuits Syst. Comput*, 1991. Vol. 1. Pp. 43-74.
- [49] Jwo J. S. *Analysis of interconnection networks based on Cayley graphs related to permutation groups*, Ph.D. Dissertation, School of Electrical Engineering and Computer Science, University of Oklahoma, Norman, OK, 1991.
- [50] Kalpakis K., Yesha Y. On the bisection width of the transposition network, *Networks*, 1997. Vol. 29 (1). Pp. 69-76.
- [51] Kanevsky A., Feng C. On the embedding of cycles in pancake graphs, *Parallel computing*, 1995. Vol. 21. Pp. 923-936.
- [52] Kececioglu J., Sankoff D. Exact and approximation algorithms for sorting by reversals, with application to genome rearrangement, *Algorithmica*, 1995. Vol. 13. Pp. 180-210.
- [53] Kikuchi Y., Araki T. Edge-bipancyclicity and edge-fault tolerant bipancyclicity of bubble-sort graphs, *Information Processing Letters*, 2006. Vol. 100. Pp. 52-59.
- [54] Konstantinova E. Reconstruction of permutations distorted by reversal errors, *Discrete Appl. Math*, 2007. Vol. 155 (18). Pp. 2426-2434.
- [55] Konstantinova E., Medvedev A. Independent even cycles in the Pancake graph and greedy Prefix-reversal Gray codes, *Graphs and Combinatorics*, 2016. Vol. 32. Pp. 1965-1978.
- [56] Kounoike Y., Kaneko K., Shinano Y. Computing the diameter of 14- and 15-pancake graphs. In: *Proceedings of the International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks*, 2005. Pp. 490-495.

- [57] Krakovski R., Mohar B. Spectrum of Cayley graphs on the symmetric group generated by transposition, *Linear Algebra and its Applications*, 2012. Vol. 437. Pp. 1033-1039.
- [58] Krivelevich M., Sudakov B. Sparse pseudo-random graphs are Hamiltonian, *J. Graph Theory*, 2003. Vol. 42. Pp. 17-33.
- [59] Lakshmivarahan S., Jwo J. S., Dhall S. K. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: a survey, *Parallel Comput*, 1993. Vol. 19 (4). Pp. 361-407.
- [60] Landau E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. I, Teubner, Leipzig, 1909.
- [61] Leighton F. T. *Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes*, Morgan Kaufmann Pub., California, 1992.
- [62] Levenshtein V. I., Siemons J. Error graphs and the reconstruction of elements in groups, *J. Comb. Theory, Ser. A*, 2009. Vol. 116 (4). Pp. 795-815.
- [63] Lovász L. Problem 11 in: *Combinatorial structures and their applications* (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alberta, 1969), Gordon and Breach, New York, 1970. Pp. 243-246.
- [64] Malkevitch J. Pancakes, Graphs, and the Genome of Plants, *The UMAP Journal*, 2002. Vol. 23. Pp. 373-382.
- [65] Marušič D. Hamiltonian circuits in Cayley graphs, *Discrete Mathematics*, 19983. Vol. 46. Pp. 49-54.
- [66] Murphy G. A new construction of Young's seminormal representation of the symmetric group, *J. Algebra*, 1981. Vol. 69. Pp. 287-291.
- [67] Pak I., Radoičić R. Hamiltonian paths in Cayley graphs, *Discrete Mathematics*, 2009. Vol. 309. Pp. 5501-5508.
- [68] Palmer J. D., Herbon L. A. Tricircular mitochondrial genomes of brassica and Raphanus: reversal of repeat configurations by inversion,

- Sequence alignment in molecular biology, *Nucleic Acids Research*, 1986. Vol. 14. Pp. 9755-9764.
- [69] Petersen J. Sur le theoreme de Tait, *L'Intermediaire des Mathematiciens*, 1898. Vol. 5. Pp. 225-227.
- [70] Pevzner P. A. *Computational molecular biology: an algorithmic approach*, The MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- [71] Rankin R. A. A campanological problem in group theory II, *Proc. Camb. Phil. Soc*, 1966. Vol. 62. Pp. 11-18.
- [72] Rapaport-Strasser E. Cayley color groups and Hamilton lines, *Scripta Math*, 1959. Vol. 24. Pp. 51-58.
- [73] Sagan B. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Springer, New York, second edition, 2001.
- [74] Sankoff D., El-Mabrouk N. *Genome rearrangement*, In: T. Jiang, T. Smith, Y. Xu, M. Q. Zhang (Eds.), *Current topics in computational molecular biology*, MIT Press, 2002.
- [75] Savage C. A survey of combinatorial Gray codes, *SIAM Review*, 1996. Vol. 39. Pp. 605-629.
- [76] Sheu J. J., Tan J. J. M., Chu K. T. Cycle embedding in pancake interconnection networks, *Proc. 23rd Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*, Taiwan, 2006. Pp. 85-92.
- [77] Sheu J. J., Tan J. J. M., Hsu L. H., Lin M. Y. On the Cycle Embedding of Pancake Graphs, *Proceedings of 1999 National Computer Symposium*, 1999. Pp. C414-C419.
- [78] Schwenk A. J. Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra, in: *Theory and Applications of Graphs, Proceedings of the International Conference Western Michigan University (Y. Alavi, D.R. Lick eds.)*, Kalamazoo, Michigan May 11-15, 1976, *Lecture Notes in Mathematics*, 1978. Vol. 642. Pp. 516-533.

- [79] Slater P. J. Generating all permutations by graphical transpositions, *Ars Combin*, 1978. Vol. 5. Pp. 219-225.
- [80] Tchuente M. Generation of permutations by graphical exchanges, *Ars Combin*, 1982. Vol. 14. Pp. 115-122.
- [81] Valencia-Pabon M., Vera J.-C. On the diameter of Kneser graphs, *Discrete Mathematics*, 2005. Vol. 305. Pp. 383-385.
- [82] Wenjun Xiao. Some results on diameters of Cayley graphs, *Discr. Appl. Math*, 2006. Vol. 154. Pp. 1640-1644.
- [83] Williams A. The greedy gray code algorithm, *LNCS*, 2013. Vol. 8037. Pp. 525-536.
- [84] Williams A., Sawada J. Greedy Pancake Flipping, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2013. Vol. 44. Pp. 357-362.
- [85] Zaks S. A new algorithm for generation of permutations, *BIT*, 1984. Vol. 24. Pp. 196-204.
- [86] Журавлев Ю. И., Флеров Ю. А., Вялый М. Н. *Дискретный анализ. Основы высшей алгебры*. М.: МЗ-Пресс, 2007. 224 с.
- [87] Компельмахер В. Л., Лисковец В. А. Последовательное порождение перестановок с помощью базиса транспозиций, *Кибернетика*, 1975. Т. 3. С. 17-21.
- [88] Кострикин А. И. *Введение в алгебру, Часть 1, Основы алгебры*, Физматлит, 2004.
- [89] Кнут Д. *Искусство программирования*, том 4, выпуск 2. Генерация всех кортежей и перестановок. М.: Вильямс, 2008. 160 с.
- [90] Кэртис Ч., Райнер И. *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, Москва, 1969.
- [91] Харари Ф. *Теория графов*, Мир, 1973.

Учебное издание

Константинова Елена Валентиновна

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Учебное пособие

Редактор *Ю. Е. Кузьмина*
Верстка *Е. В. Константиновой*
Обложка *Е. В. Неклюдовой*

Подписано в печать 27.12.2022.
Формат 60×84 1/8. Уч.-изд. л. 17,25. Усл. печ. л. 16.
Тираж 100 экз. Заказ №298
Издательско-полиграфический центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.